N° d'Ordre 406

Année 1970

THESE

présentée à l'Université Paul Sabatier - Toulouse

en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Michel LAQUERBE

Licencié es-Sciences

Docteur en Hydrodynamique

DETERMINATION DES FORCES S'EXERCANT SUR UNE PARTICULE SPHERIQUE PLACEE DANS UN ECOULEMENT LAMINAIRE

Soutenue le 17 juillet 1970 devant la Commission D'Examen :

M.	ESCANDE	Président
MM.	NOUGARO	Examinateurs
	GRUAT	
	CASTEX	Directeur de Laboratoire.
	SANANES	Directeur de Recherches au C N R S.

Autorisation de soutenance
accordée. 1 - JUIL. 1970
TOULOUSE, le

Le Président du Conseil Transitoire,

F. MATHIS

FACULTE DES SCIENCES DE TOULOUSE

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543906_0012

N° d'Ordre 406

Année 1970

THESE

présentée à l'Université Paul Sabatier - Toulouse

en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Michel LAQUERBE

Licencié es-Sciences

Docteur en Hydrodynamique

DETERMINATION DES FORCES S'EXERCANT SUR UNE PARTICULE SPHERIQUE PLACEE DANS UN ECOULEMENT LAMINAIRE

Soutenue le 17 juillet 1970 devant la Commission D'Examen :

M.	ESCANDE	Président
MM.	NOUGARO	Examinateurs
	GRUAT	
	CASTEX	Directeur de Laboratoire.
	SANANES	Directeur de Recherches au C N R S.

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE TOULOUSE

FACULTE DES SCIENCES

PERSONNEL

Administration

M. MATHIS ..... Président du Conseil Transitoire de Gestion
M. AGID ..... Assesseur
M. LELUBRE ..... Assesseur

Honorariat

M. CAPDECOMME..... Doyen honoraire, Recteur honoraire
M. DELTHEIL ..... Recteur honoraire, Doyen honoraire, Professeur honoraire
M. DUPOUY ..... Doyen honoraire, Membre de l'Institut Directeur général honoraire du CNRS
M. DURAND ..... Doyen honoraire
M. FOUCHE ..... Professeur honoraire
M. GAUSSENS ..... Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. JACQUES ..... Professeur honoraire
M. MIGNONAC ..... Professeur honoraire
M. MORQUER ..... Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. VANDEL ..... Professeur honoraire, Membre de l'Institut
M. TEISSIE-SOLIER ..... Professeur honoraire

Professeurs

M. ESCANDE ..... Mécanique des Fluides, Membre de l'Institut
M. DUPOUY ..... Physique, Membre de l'Institut

M. CASTERAS .....Géologie, Correspondant de l'Institut
M. BEDOS .....Chimie
M. CAPDECOMME .....Minéralogie
M. DUPIN .....Radioélectricité
M. NOUVEL .....Biologie Générale
M. GALLAIS .....Chimie, Correspondant de l'Institut
M. DURAND .....Physique
M. FERT ..... Physique
M. DIEHL ..... Agronomie
M. LESBRE ..... Chimie Organique
M. BRUNEL ..... Physiologie Végétale
M. HURON ..... Mathématiques Appliquées
M. MARGULIS ..... Pédologie
M. TRICHE ..... Chimie Analytique et spectrographique
M. LEDOUX ..... Zoologie appliquée
M. RIVALS ..... Agriculture
M. PERRIER ..... Physique
M. MATHIS ..... Chimie
M. ORLIAC ..... Géochimie et Minéralogie
M. LAFOURCADE ..... Physique
M. ANGELIER ..... Zoologie
Mlle de FERRÉ ..... Botanique
M. FARRAN ..... Minéralogie et Géotechnique
M. LAUDET ..... Physique Théorique et Calcul numérique
M. SARFATY ..... Biologie animale
M. NOUGARO ..... Hydraulique générale et appliquée
M. LAGASSE ..... Electrotechnique
M. GARDY ..... Génie chimique
M. BLANC ..... Physique Nucléaire
M. BIREBENT ..... Electronique Appliquée
M. VOIGT ..... Chimie Minérale
M. LEREDDE ..... Botanique

M. LELUBRE ..... Géologie
M. TROCHAIN ..... Botanique
M. MASDUPUY ..... Chimie
M. LALAGUE ..... Mathématique générale
M. DESSENS ..... Physique du Globe, Correspondant de l'Institut
M. BOUIGUE ..... Astronomie
M. COUCHET ..... Physique
M. LEJEUNE ..... Chimie
M. LASCOMBES ..... Botanique
M. ASSELINEAU ..... Chimie Biologique
M. MAURET ..... Chimie Systématique
M. AGID ..... Physiologie
M. MONTANT ..... Cryptogamie
M. GAUTIER ..... Physique
M. CRUMEYROLLE ..... Mathématiques
M. GOURINARD ..... Géologie
M. PULOU ..... Minéralogie
M. CAMBOU ..... Physique Spatiale
M. MIQUEL ..... Chimie
M. LACOSTE ..... Electrotechnique
M. THIBAULT ..... Mécanique rationnelle et appliquée
M. MONTEL ..... Chimie Physique et Electrochimie
M. MASCART ..... Mathématiques
M. MEDIONI ..... Psychophysiologie
M. THIRRIOT ..... Hydrodynamique E.N.S.E.E.I.H.T.
M. BRENON ..... Géologie
M. LAFON ..... Calcul Différentiel et Intégral
M. RAYNAUD P..... Physiologie Animale
M. ZALTA ..... Chimie Biologique
M. SEVELY ..... Electrotechnique
M. POMMIEZ ..... Mathématiques
M. REY ..... Biologie Végétale
M. COULOMB ..... Physique

Professeurs associés

M. MANSOUR
M. RICHER

Professeurs sans chaire

M. HAMANT ..... Botanique
Mme BRUNEL ..... Physiologie Végétale
Mlle BERDUCOU ..... Physiologie Végétale
M. MARONI ..... Chimie
M. SECONDAT ..... Zootechnie et Hydrobiologie appliquée
M. PICCA ..... Physique
M. MERIC ..... Mathématiques Appliquées
M. BEETSCHEN ..... Biologie Générale
Mme LECAL ..... Zoologie
M. BUGAREL ..... Génie Chimique
M. MIROUSE ..... Géologie
M. PILOD ..... Physique
M. LARROQUE ..... Physique
M. BARRANS ..... Chimie
M. TRINQUIER ..... Physique
M. GRUAT ..... Mécanique des Fluides (Hydraulique)
Mme LAFON ..... Mathématiques
Mlle LAPEYRE ..... Mathématiques (Informatique)
M. DAT ..... Mécanique des Fluides
M. JEANNIN ..... Chimie Minérale
M. BERTRAND ..... Chimie
M. SATGE ..... Chimie organique
M. DESQ ..... Mathématiques
M. MAHENC ..... Chimie
M. LATTES ..... Chimie

M. ROCARD ..... Electronique
M. DEGEILH ..... Physique
M. FALLOT ..... Biologie Végétale (viticulture et arboriculture)
M. POILBLANC ..... Chimie
M. TOUZE ..... Physiologie Végétale
M. FRASNAY ..... Mathématiques
M. CASSAGNAU ..... Zoologie
M. GUERIN ..... Mathématiques

Maîtres de Conférences

M. BLANCHARD..... Mathématiques
M. COULON ..... Physique Industrielle
M. HOFFMANN ..... Electronique
M. BITSCH ..... Zoologie
M. FONTAN ..... Physique Nucléaire
M. PESCIA ..... Physique
M. SICARD ..... Biologie Génétique
M. CAUSSINUS ..... Mathématiques Appliquées
M. DE LOTH ..... Chimie Physique
M. MARTY ..... Physique Industrielle
M. BAUDRAS ..... Chimie Biologique
M. DURAND Ph..... Physique
M. LEFEUVRE ..... Electronique ENSEEIHT
M. SOUQUET ..... Géologie
M. SAPORTE ..... Physique
M. ATTEIA ..... Mathématiques
M. ENJALBERT ..... Chimie
M. IMBERT ..... Psychophysiologie
M. SCHNEIDER ..... Biologie Cellulaire
M. ANGELINO .....Génie Chimique

M. DABOSI ..... E.N.S.C.
M. ETTINGER ..... Mathématiques
M. CALVET ..... Mécanique des Fluides (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. PAGANI ..... Physique

Maîtres de Conférences Associés

M. PUN
M. JEAN

Chargés d'Enseignement

M. BEAUFILS ..... Informatique
M. CASTAGNETTO L..... Mathématiques (E.N.S.EE.I.H.T.)
M. DARROZES ..... Mécanique
M. OLIVIER ..... Mathématiques

Personnel de la Faculté affecté à l'Institut National des Sciences Appliquées de TOULOUSE

Professeurs sans chaire

M. CASSIGNOL ..... Génie Electrique
M. COLLETTE ..... Physique

Maîtres de Conférences

M. FAGET ..... Physique
M. TRUCHASSON ..... Mécanique
M. SCHUTTLER ..... Physique
M. ROQUES .....Chimie
M. DRILLAT .....Chimie
M. MIRA .....Génie Electrique
M. GRATELOUP .....Génie Electrique

M. LETURCQ ..... Génie Electrique
M. SIRIEYS ..... Génie Civil
M. NASO ..... Génie Civil
M. DURAND Gilbert ..... Chimie
M. CARRARA ..... Physique
M. CUPPENS ..... Mathématiques

Personnel affecté à l'Institut Universitaire de Technologie de TOULOUSE

Maîtres de Conférences

M. MARTIN..... Génie Electrique
M. THENOZ ..... Minéralogie
M. PERENNOU ..... Informatique

Chargé d'Enseignement

M. REY ..... Génie Electrique

Secrétariat

M. PRINEAU ..... Conseiller Administratif des Services Universitaires

A ma femme

à mes enfants

à mes parents

à mes beaux-parents

à ma famille

avec tout mon amour et ma reconnaissance.

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS

INTRODUCTION 1.

CHAPITRE I - ETUDE THEORIQUE 5.

CHAPITRE II - INSTALLATIONS EXPERIMENTALES 31.

1. Première installation expérimentale 31.

2. Deuxième installation expérimentale 50.

. Réalisation et choix des particules 59.

3. Déroulement des expériences 66.

. Principe de la mesure 66.
. Déroulement des expériences 67.
. Dépouillement d'un cliché 68.

CHAPITRE III - INTERPRETATION DES RESULTATS 79.

1. Analyse dimensionnelle du problème 79.

2. Représentation des résultats 88.

. Force de trainée 109.
. Force de portance 119.
. Détermination des différents coefficients 132.
. Etude de la vitesse de rotation 137.

3. Précision des mesures 141.

. Force de trainée 141.
. Force de portance 142.
. Vitesse de rotation 146.

. $N_1 = \dfrac{F_T}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \quad C_X}$ 147.

. $N_2 = \dfrac{F_{P2}}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \quad C_X}$ 148.

CHAPITRE IV - ETUDE DU COMPORTEMENT D'UNE PARTICULE SPHERIQUE AU CONTACT AVEC LA PAROI 153.

CONCLUSION 161.

BIBLIOGRAPHIE

A V A N T - P R O P O S

Cet avant-propos veut avant tout être une dédicace à nos Maîtres.

Nous avons l'honneur d'avoir pu réunir pour notre Commission d'Examen nos Maîtres qui, depuis notre rentrée dans les Laboratoires de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique, d'Informatique et d'Hydraulique de Toulouse, nous ont initié à la recherche.

Qu'il nous soit donc permis de les remercier et tout d'abord

Monsieur le Professeur ESCANDE, Membre de l'Institut, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique , d'Informatique et d'Hydraulique de Toulouse, qui nous a fait l'honneur de présider notre Jury. Nous devons à sa haute bienveillance d'avoir pu effectuer ce travail dans le cadre du Laboratoire et nous avons trouvé auprès de lui, chaque fois que nous l'avons demandé, appuis et conseils éclairés.

Monsieur le Professeur NOUGARO occupe dans notre gratitude une place toute spéciale. C'est lui qui nous a initié non seulement à la recherche en tant que Directeur de thèse lors de nos débuts de chercheur il y a quelques années, mais également à

l'enseignement. Si sa grande compétence dans le domaine scientifique nous a beaucoup aidé, la chaleur humaine que nous avons toujours trouvée près de lui a été un facteur très important. Nous lui devons d'aimer la recherche et l'enseignement et d'avoir pu, dans les moments difficiles, surmonter nos défaillances.

Nous avons eu la chance, lors du retour de Monsieur le Professeur GRUAT à l'Ecole, d'être son premier élève. Il serait difficile de pouvoir résister à un tel Maître. Son allant, sa foi dans la recherche, sa passion dans le travail et son dévouement sans limites, sont autant d'exemples pour nous. De plus, par ses rapports francs et directs, il a toujours su nousdonner le courage pour poursuivre notre travail. Qu'il en soit très sincèrement remercié et qu'il veuille bien croire que tout au long de notre coopération, nous avons toujours essayé de mériter sa confiance et de l'aider de toutes nos possibilités dans son travail. A une époque où les valeurs sont si souvent discutées, il nous est agréable de pouvoir dire à nos cadets qu'il existe encore de vrais "patrons".

Nous remercions Monsieur CASTEX, Directeur du Laboratoire de Banlève, et Monsieur SANANES, Directeur de Recherche au Centre National de la Recherche Scientifique, qui nous ont fait l'honneur de participer à notre Jury.

Un travail de recherche est avant tout un travail d'équipe. Sans le concours de nombreuses personnes du Laboratoire notre travail n'aurait jamais pu aboutir.

Je voudrais d'abord remercier les Membres du Groupe "Transport Solide", chercheurs et techniciens. Beaucoup ont été

appelés à d'autres fonctions mais nous ne saurions les oublier.

Qu'il nous soit permis de faire une mention spéciale pour Monsieur Georges DURANTE qui, pendant plusieurs années, a mis à notre disposition ses nombreuses qualités intellectuelles et techniques. Une grande part de nos résultats lui revient. Nous lui souhaitons le grand succès qu'il mérite.

Nous ne voudrions omettre de remercier Monsieur CAUGNE et Monsieur Claude DESCOMPS ainsi que tout le Personnel de l'Atelier. Il leur a fallu beaucoup d'ingéniosité et de patience pour réaliser des installations expérimentales qui n'étaient simples que sur plan.

Il me reste à remercier Madame MATHIEU. Malgré ses nombreuses activités, elle a accepté avec beaucoup de gentillesse et énormément de patience ce surcroît de travail et a réussi l'exploit de tirer d'un bien mauvais manuscrit un ouvrage matériellement impeccable, aidée en cela par les Services de la Chambre de Commerce de Mazamet qui ont mis à notre disposition leur matériel Offset.

DETERMINATION DES FORCES S'EXERCANT SUR UNE PARTICULE SPHERIQUE

PLACEE DANS UN ECOULEMENT LAMINAIRE

INTRODUCTION

Dans de très nombreux problèmes pratiques, on est amené à considérer des particules solides placées dans un écoulement à gradient de vitesse. C'est notamment le cas de grains de sable constituant le fond d'une rivière, c'est le cas de particules solides transportées en suspension dans des conduites. C'est le cas encore des lits fluidisés utilisés dans l'industrie chimique ou bien c'est le cas de flotteurs placés dans des conduites.

Dans le cas où il existe effectivement un gradient de vitesse, l'écoulement autour d'une telle particule est dissymétrique. La résultante des forces hydrodynamiques peut donc être décomposée en deux :

- une force de trainée F_T dirigée dans le sens de l'écoulement ;
- une force de portance F_p perpendiculaire à la direction de l'écoulement.

S'il est possible de déterminer avec une assez bonne approximation la force de trainée, la force de portance est très mal connue. Cette force de portance semble néanmoins jouer un rôle très important dans les phénomènes évoqués plus haut. Elle intervient dans le critère de mise en mouvement des matériaux ainsi que dans le phénomène de saltation. Elle a une grande influence dans la détermination de la position d'équilibre des particules ou des flotteurs en suspension dans un écoulement.

L'état actuel de nos connaissances ne permet pas, à partir des caractéristiques de l'écoulement et des caractéristiques de la particule, de déterminer les forces qui s'exercent sur celle-ci.

Le but de cette étude est de déterminer les forces qui s'exercent sur une particule isolée dans un écoulement laminaire. Cette étude analyse l'aspect fondamental du phénomène et ne prétend pas, dans l'état actuel de nos connaissances, conduire à des applications pratiques immédiates.

POSITION DU PROBLEME :

Le problème peut être abordé soit par une voie théorique , soit par une voie expérimentale mais l'une et l'autre de ces méthodes présentent de grandes difficultés.

METHODES THEORIQUES :

En nous inspirant de théories récentes sur l'écoulement uniforme d'un fluide visqueux, nous proposons une solution

théorique dans le cas où :

- le nombre de Reynolds de l'écoulement autour de la bille est inférieur à 1 ;
- il n'y a aucune inter-réaction entre la particule et une paroi.

Si une telle solution théorique suggère une expression de la force de portance, elle ne correspond pas au problème que l'on rencontre dans la pratique. En effet, dans la grande majorité des cas, l'écoulement autour d'une particule correspond à un régime de transition (nombre de Reynolds supérieur à 1) et d'autre part l'existence du gradient de vitesse est due à la présence d'une paroi dont on ne peut pas négliger les effets.

Il convient en effet de signaler dès à présent que notre travail a mis en évidence l'influence prépondérante dans certains cas de la proximité de la paroi sur la force de portance.

METHODES EXPERIMENTALES :

Une particule entraînée par un écoulement n'est soumise à aucune force autre que son propre poids et les forces hydrodynamiques. Ses mouvements sont donc parfaitement libres et en particulier une particule sphérique peut se mettre à tourner sur elle-même sous l'action des forces de cisaillement.

Il est donc impossible si l'on veut respecter la nature même du phénomène de fixer la particule à un système permettant de mesurer les efforts. En effet, ce système introduit des forces de liaison supplémentaires qui limitent les degrés de liberté de la particule. En particulier, il ne semble pas possible d'imaginer un système de fixation suffisamment sensible qui laisse la particule libre de tourner sur elle-même.

Le procédé expérimental utilisé qui consiste à maintenir la particule en équilibre dans un écoulement laisse à cette dernière tous ses degrés de liberté et respecte ainsi la nature même du phénomène.

Les dimensions de l'installation et des particules étudiées, la masse spécifique du fluide et des particules ont été choisies de telle façon que :

- l'écoulement dans l'installation soit laminaire ce qui permet une détermination précise des caractéristiques locales de l'écoulement ;
- le nombre de Reynolds de l'écoulement autour de la bille correspond à un régime de transition.

Cette méthode nous a permis de mesurer dans différents cas la force de trainée , la force de portance ainsi que la vitesse de rotation de la particule sur elle-même.

Une représentation de tous ces résultats est proposée en fonction de paramètres sans dimension. Le choix de ces paramètres déduits d'une analyse dimensionnelle est inspirée de l'étude théorique.

CHAPITRE I

ETUDE THEORIQUE

I. 1. PRESENTATION DU PROBLEME

La détermination des efforts hydrodynamiques exercés par un écoulement d'un fluide visqueux et incompressible autour d'un corps fixe est un problème déjà ancien.

La première solution a été proposée par STOKES (1851)dans le cas d'un écoulement lent, permanent et uniforme autour d'une sphère. Cette solution, établie en négligeant totalement les effets d'inertie du fluide, n'est valable qu'au voisinage de la sphère et pour des nombres de Reynolds inférieurs à 1.

OSEEN (1910) propose une autre solution qui tient compte des forces d'inertie dans la région où leur ordre de grandeur devient comparable à celui des forces de viscosité. Cette

solution, valable à l'infini, présente des incompatibilités avec la condition de non glissement sur la sphère.

Plusieurs extensions des solutions de STOKES et d'OSEEN ont été proposées et, en particulier, celle de LAGERSTROM et COLE en 1955 , puis PROUDMAN et PEARSON en 1956 qui fondent leur raisonnement sur le principe suivant :

Deux solutions asymptotiques différentes d'un même système doivent être asymptotiquement égales dans leur domaine commun de validité.

Toutes ces théories supposent que l'écoulement uniforme à l'infini est bidimensionnel c'est-à-dire admet un axe de symétrie. Elles permettent d'étudier la force de trainée mais ne peuvent pas être utilisées pour mettre en évidence une force de portance due essentiellement à l'absence de similitude de l'écoulement.

Une sphère placée dans un écoulement à gradient de vitesse constitue un phénomène beaucoup plus complexe. En effet, non seulement l'écoulement à l'infini ne peut pas être considéré comme uniforme mais encore sous l'action des forces de cisaillement la sphère se met à tourner sur elle-même à une vitesse de rotation $\vec{\Omega}$. L'écoulement n'admettant plus d'axe de symétrie doit être considéré comme tridimensionnel.

Il faut attendre 1961 pour que RUBINOW et KELLER proposent une méthode mathématique de résolution de l'écoulement tridimensionnel d'un fluide visqueux autour d'une sphère.

I. 2. THEORIE DE RUBINOW ET KELLER

La théorie de RUBINOW et KELLER s'applique dans le cas de l'écoulement uniforme à l'infini d'un fluide visqueux autour d'une sphère animée d'un mouvement de rotation et pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds.

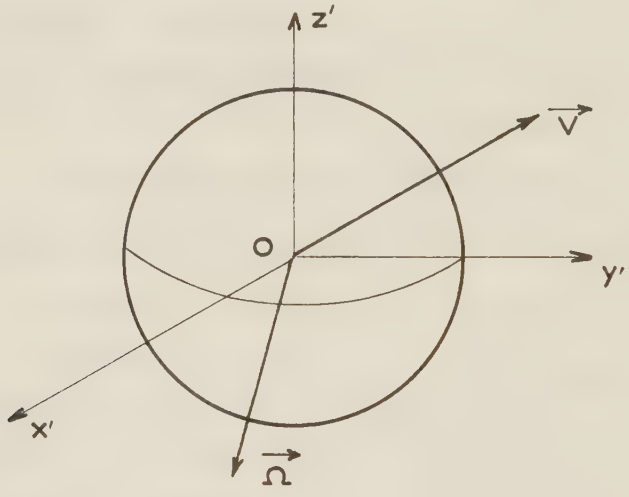
Les auteurs mettent ainsi en évidence l'existence d'une force de portance orthogonale à la direction de la vitesse à l'infini et à l'axe de rotation de la particule. Elle s'applique notamment dans le cas du mouvement des satellites ou d'un objet astronomique dans un gaz de faible densité et au mouvement lent d'une sphère dans un fluide visqueux. Elle est basée sur la résolution des équations de NAVIER et STOKES et s'inspire des généralisations proposées par LAGERSTROM et COLE d'une part et par PROUDMAN et PEARSON d'autre part.

I.2.1. MISE EN EQUATIONS

Considèrons une sphère de rayon a animée d'une vitesse de translation $\vec{V}$ et d'une vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ dans un fluide visqueux incompressible de masse spécifique ρ et de viscosité dynamique μ .

Nous supposons tout d'abord le fluide au repos loin de la sphère.

Le système de coordonnées lié à la sphère a son origine au centre de la sphère. L'axe Ox' est dirigé suivant la direction négative des vitesses et le vecteur $\vec{\Omega}$ est contenu dans le plan O x' y' .



Nous désignons par :

$\vec{u}'$ la vitesse du fluide

p' la pression dans le fluide

A l'infini ($r' \to \infty$) $\vec{u}'$ a comme composante (V,0,0)

$p' = 0$

Sur la sphère ($r' = a$) $\vec{u}' = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}'$

$\vec{u}'$ et p' satisfont aux équations de NAVIER-STOKES , à l'équation de continuité, à la condition de non glissement sur la sphère et aux conditions d'uniformité à l'infini, c'est-à-dire au système d'équations :

$$\mu \Delta \vec{u}' - \vec{\text{grad}}\, p' = \rho (\vec{u}' \cdot \vec{\text{grad}})\, \vec{u}' \qquad (1)$$

$$\text{div}\ \vec{u}' = 0 \qquad (2)$$

$$\vec{u}' = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}' \qquad \text{pour } r' = a \qquad (3)$$

$$\vec{u}' = (V,0,0) \qquad r' = \infty \qquad (4)$$

$$p' = 0 \qquad r' = \infty \qquad (5)$$

Introduisons le nombre de Reynolds Re et les quantités sans dimension suivantes :

$$\begin{aligned} x &= a^{-1} x' \\ y &= a^{-1} y' \\ z &= a^{-1} z' \\ \vec{r} &= a^{-1} \vec{r}' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p &= a V^{-1} \mu^{-1} p' \\ \vec{u} &= V^{-1} \vec{u}' \\ \vec{\omega} &= a V^{-1} \vec{\Omega} \\ Re &= \rho \mu^{-1} V a \end{aligned} \qquad (6)$$

Nous pouvons écrire le système d'équations (1-5) en fonction de ces nouvelles variables.

$$\Delta \vec{u} - \vec{\text{grad}}\, p = Re\, (\vec{u} \,.\, \vec{\text{grad}})\, \vec{u} \qquad (7)$$

$$\text{div}\ \vec{u} = 0 \qquad (8)$$

$$\vec{u} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad \text{pour} \quad r = 1 \qquad (9)$$

$$\vec{u} = (1,0,0) \qquad r = \infty \qquad (10)$$

$$p = 0 \qquad r = \infty \qquad (11)$$

Nous allons chercher des solutions approchées $\vec{u}$ et p du système (7-11) exprimées en fonction de Re pour de petites valeurs de Re.

Une première solution (STOKES) est valable près de la sphère mais pas à l'infini; une deuxième solution (OSEEN) est valable à l'infini mais pas près de la sphère. La comparaison de ces deux dernières permet de définir une solution valable dans tout le domaine.

I.2.2. GENERALISATION DE STOKES

La généralisation de la solution de STOKES est de la forme :

$$\vec{u} = \vec{u}_o + Re\,\vec{u}_1 + 0\,(Re) \qquad (12)$$

$$p = p_o + Re\,p_1 + 0\,(Re) \qquad (13)$$

En réalité, l'expression de $\vec{u}$ et p comprend, comme l'ont démontré PROUDMAN et PEARSON pour une sphère ne tournant pas sur elle-même, des termes en Log Re et en puissance de Re. Nous nous limitons ici à la forme indiquée en 12 et 13.

Portons (12) et (13) dans les équations (7) (8) (9):

$$\Delta(\vec{u}_o+Re\,\vec{u}_1) - \vec{grad}\,(p_o+Re\,p_1) = R\,(\vec{u}_o+Re\,\vec{u}_1)\,.\vec{grad})\,(\vec{u}_o+Re\,\vec{u}_1)$$

$$div\,(\vec{u}_o+Re\,\vec{u}_1) = 0$$

$$\vec{u}_o+Re\,\vec{u}_1 = \vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{r} \qquad \text{pour} \quad r = 1$$

Identifions les coefficients des termes en Re^o. On obtient :

$$\Delta\,\vec{u}_o - \vec{grad}\,p_o = 0 \qquad (14)$$

$$div\;\vec{u}_o = 0 \qquad (15)$$

$$\vec{u}_o = \vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{r} \qquad \text{pour } r = 1 \qquad (16)$$

De même pour les coefficients en Re^1

$$\Delta\,\vec{u}_1 - \vec{grad}\,p_1 = (\vec{u}_o\;\vec{grad}\;)\,\vec{u}_o \qquad (17)$$

$$div\;\vec{u}_1 = 0 \qquad (18)$$

$$\vec{u}_1 = 0 \qquad \text{pour } r = 1 \qquad (19)$$

La théorie de STOKES n'est pas uniformément valable à l'infini donc il n'est pas possible de respecter en toute rigueur les conditions (10) et (11).

I.2.3. GENERALISATION D'OSEEN

Variables généralisées:

Introduisons les nouvelles variables généralisées X, Y, Z et s ainsi que les nouvelles fonctions $\vec{U}$ et P ainsi définies :

$$X = Re\ x \qquad Y = Re\ y \qquad Z = Re\ z \qquad \vec{s} = Re\ r$$

$$\vec{U}(X,Y,Z,Re) = \vec{u}(Re^{-1}X, Re^{-1}Y, Re^{-1}Z, Re)$$
$$P(X,Y,Z,Re) = Re^{-1}p(Re^{-1}X, Re^{-1}Y, Re^{-1}Z, Re) \qquad (20)$$

Avec ces nouvelles variables, le système (7)-(11) va s'écrire :

$$\Delta\vec{U} - \vec{grad}\ P = (\vec{U}\ \vec{grad})\ \vec{U} \qquad (21)$$
$$div\ \vec{U} = 0 \qquad (22)$$
$$\vec{U} = Re^{-1}\ \vec{\omega} \wedge \vec{s} \qquad \text{pour } s = Re \qquad (23)$$
$$\vec{U} = (1,0,0) \qquad \text{pour } s = \infty \qquad (24)$$
$$P = 0 \qquad \text{pour } s = \infty \qquad (25)$$

Généralisation d'OSEEN :

La solution de $\vec{U}$ et P du système (21-25) est de la forme :

$$\vec{U} = \vec{U}_o + Re\,\vec{U}_1 + O(R) \qquad (26)$$

$$P = P_o + Re\,P_1 + O(R) \qquad (27)$$

Portons (26) et (27) dans les équations (21), (22), (24) et (25) et identifions les coefficients de Re. On obtient :

Pour Re^o

$$\Delta\vec{U}_o - \vec{grad}\,P_o = (\vec{U}_o\,\vec{grad})\,\vec{U}_o \qquad (28)$$

$$div\ \vec{U}_o = 0 \qquad (29)$$

$$\vec{U}_o = (1,0,0) \quad \text{pour } s = \infty \qquad (30)$$

$$P_o = 0 \quad s = \infty \qquad (31)$$

Pour Re^1

$$\Delta\vec{U}_1 - \vec{grad}\,P_1 = (\vec{U}_o\vec{grad})\vec{U}_1 + (\vec{U}_1\vec{grad})\vec{U}_o \qquad (32)$$

$$div\ \vec{U}_1 = 0 \qquad (33)$$

$$\vec{U}_1 = (0,0,0) \quad \text{pour } s = \infty \qquad (34)$$

$$P_1 = 0 \quad s = \infty \qquad (35)$$

Remarquons que cette fois, nous n'avons pas pris en considération la condition (23) de non glissement sur la sphère puisque la généralisation d'OSEEN n'est pas uniformément valable dans le domaine voisin de la sphère.

Notons que les équations (28) à (31) satisfaites par $\vec{U}_o$ et P_o sont les mêmes que les équations (21), (22), (24) et (25) en $\vec{U}$ et P. Donc nous ne pouvons pas espérer résoudre ces équations plus facilement que les équations originales.

Une solution particulière pour $\vec{U}_o$ et P_o est cependant évidente c'est :

$$\vec{U}_o = (1,0,0) \tag{36}$$

$$P_o = 0 \tag{37}$$

La généralisation d'OSEEN consiste justement à prendre cette solution particulière pour $\vec{U}_o$et P_o. Avec une telle solution, l'équation (32) devient :

$$\Delta\vec{U}_1 - \vec{\text{grad}}\, P_1 = \frac{\partial \vec{U}_1}{\partial X} \tag{38}$$

I.2.4. PRINCIPE DE COMPARAISON

Ce principe peut s'énoncer de la façon suivante :

Deux généralisations asymptotiques d'une fonction donnée doivent être asymptotiquement égales dans leur domaine commun de validité.

On admet que :

- La solution de STOKES est valable dans un domaine compris entre la sphère et une sphère de rayon r'_s .

- La solution d'OSEEN est valable dans un domaine compris entre une sphère de rayon r'_o et l'infini.

Le rayon r'_o en variables généralisées s'exprime par un paramètre s :

$$r_o = a^{-1} r'_o$$

$$s = Re\, r_o$$

Si r'_o peut être relativement grand pour des nombres de Reynolds petits, s est lui-même petit.

Le domaine commun de validité des solutions est le domaine compris entre les sphères de rayon r'_s et r'_o. Dans ce domaine, les généralisations de STOKES et OSEEN doivent être asymptotiquement égales. Ce principe détermine de nouvelles conditions aux limites que doivent satisfaire à la fois les deux généralisations et les substituts aux conditions à l'infini et sur la sphère qu'il n'est pas possible de respecter.

I.2.5. SOLUTION D'ORDRE 0

Pour les grandes valeurs de r , le principe de comparaison donne immédiatement , puisque $\vec{U}_o = (1,0,0)$ et $P_o = 0$:

$$\vec{u}_o = \vec{U}_o + 0\,(1) \qquad \text{quand } r \to \infty \qquad (39)$$

$$p_o = 0\,(1) \qquad \text{quand } r \to \infty \qquad (40)$$

Approximation de STOKES d'ordre 0

La solution du système défini par les équations (14), (16), (39) et (40) est unique et peut être établie par la méthode proposée par LAMB (1 p 595-596). Le système d'équations étant linéaire, le principe de superposition s'applique et

l'écoulement peut être considéré comme la superposition de deux écoulements:

- un écoulement uniforme autour d'une sphère fixe
- un écoulement produit par une sphère tournant dans un fluide au repos à l'infini.

Les solutions de ces deux écoulements étant connues , la solution générale est la somme de ces deux solutions et l'on obtient finalement :

$$\vec{u}_o = (1 - \frac{3}{4r} - \frac{1}{r^3})\ (1,0,0) - \frac{3x}{4}\ (\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^5})\ \vec{r} + \frac{1}{r^3}\ \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (41)$$

$$\text{et} \qquad p_o = - \frac{3x}{2r^3} \qquad (42)$$

I.2.6. SOLUTION D'ORDRE 1

I.2.6.1. Approximation d'OSEEN d'ordre 1

$\vec{U}_1$ et P_1 satisfont au système d'équations définies par les équations (38) , (33) et (35). En prenant la divergence des deux membres de l'équation (38) il vient compte tenu de (33) :

$$\Delta P_1 = 0$$

Conformément à la théorie exposée par LAMB (1 p.610) introduisons un scalaire Φ et un vecteur $\vec{W}$ définis par les relations :

$$P_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{43}$$

$$\vec{U}_1 = - \vec{grad}\ \Phi + \vec{W} \tag{44}$$

P_1 étant une fonction barmonique, Φ_1 étant également pris harmonique. On a donc :

$$\Delta \Phi = 0 \tag{45}$$

et les équations (38) et (33) deviennent alors :

$$\Delta \vec{W} - \frac{\partial}{\partial X} \vec{W} = 0 \tag{46}$$

$$\text{div } \vec{W} = 0 \tag{47}$$

RUBINOW et KELLER ont démontré le théorème suivant que nous admettrons :

Théorème : Si $\vec{W}$ satisfait aux équations (46) et (47) il existe alors deux fonctions scalaires ψ et χ telles que :

$$\vec{W} = (1,0,0) \wedge \vec{grad}\ \psi + \vec{rot}\ \ (1,0,0) \wedge \vec{grad}\ \chi \tag{48}$$

et

$$\Delta \psi - \frac{\partial}{\partial X} \psi = 0 \tag{49}$$

$$\Delta \chi - \frac{\partial}{\partial X} \chi = 0 \tag{50}$$

Définissons χ' qui satisfait également à l'équation (50) :

$$\chi' = \frac{\partial}{\partial X} \chi \qquad (51)$$

L'équation (48) s'écrit alors :

$$\vec{W} = \vec{grad}\ \chi' + \{-\chi', -\frac{\partial \psi}{\partial Z}, \frac{\partial \psi}{\partial Y}\} \qquad (52)$$

Ces solutions de la forme (48) ou (52) pour lesquelles $\psi = 0$, ont été données par LAMB (1 p.611).

RUBINOW et KELLER ont montré qu'une solution du système (45), (49) et (50) qui satisfait les conditions aux limites à l'infini est :

$$\Phi = A/s \qquad (53)$$

$$\psi = 0 \qquad (54)$$

et
$$\chi' = B/s\ e^{\{1/2\ (X-s)\}} \qquad (55)$$

avec $A = B = 3/2$

Par suite, la résolution du système conduit à :

$$\vec{U}_1 = \frac{3}{2\ s^3}(X,Y,Z) - \frac{3}{4\ s} e^{\{1/2\ (X-s)\}} (1,0,0) - \frac{3}{4} e^{\{1/2(X-s)\}} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^3}\right)(X,Y,Z) \qquad (56)$$

et $$P_1 = - \frac{3\,X}{2\,s^3} \qquad (57)$$

RUBINOW et KELLER ont montré qu'il existe d'autres solutions ψ , Φ et χ' , qui satisfont aux équations (45), (49) et (50) mais qui ne permettent pas de vérifier les conditions à l'infini.

Cette solution ne vérifie pas les conditions aux limites sur la sphère. Nous allons chercher une solution qui vérifie les conditions aux limites sur la sphère et que nous comparerons à la solution précédente dans leur domaine commun de validité.

I.2.6.2. Approximation de STOKES d'ordre 1

Les solutions $\vec{u}_1$ et p_1 vérifient le système (17) , (18) et (19). Cherchons tout d'abord une solution particulière $\vec{u}_{10}$ et p_{10} de (17) et (18) à laquelle nous ajouterons une solution $\vec{u}_{11}$ et p_{11} en vue de satisfaire aux conditions aux limites (19). Il suffira de montrer que la somme de ces deux solutions vérifient d'une part des conditions aux limites sur la sphère et d'autre part la condition de comparaison avec la solution d'OSEEN d'ordre 1 à une certaine distance de la sphère.

$\vec{u}_0$ étant donné par l'équation (41) il vient :

$$(\vec{u}_o \; \vec{grad})\vec{u}_o = \frac{3x}{16} \left\{ - \frac{3}{r^4} + \frac{8}{r^5} - \frac{6}{r^6} + \frac{1}{r^8} \right\} \quad (1,0,0)$$

$$+ \frac{3}{16} \left\{ - \frac{4}{r^3} + \frac{3}{r^4} + \frac{4}{r^5} - \frac{2}{r^6} - \frac{1}{r^8} + x^2 \left(\frac{12}{r^5} - \frac{12}{r^6} - \frac{20}{r^7} + \frac{24}{r^8} - \frac{4}{r^{10}} \right) \right\} \vec{r}$$

$$- 3x \left(\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r^6} \right) \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$- \frac{3 \omega z \sin \beta}{4} \left(\frac{1}{r^6} - \frac{1}{r^8} \right) \vec{r} - \frac{\omega \sin \beta}{4} \left\{ \frac{4}{r^3} - \frac{3}{r^4} - \frac{1}{r^6} \right\} \quad (0,0,1)$$

$$+ \frac{1}{r^6} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \qquad (58)$$

dans laquelle β désigne l'angle entre $\vec{\Omega}$ et $\vec{u}_o$.

En prenant la divergence des deux membres de l'équation (17), compte tenu de (18) et (58) , il vient :

$$\Delta p_1 = -\mathrm{div}\{(\vec{u}_o \vec{grad})\vec{u}_o\} = \frac{9}{8} \left\{ - \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^8} + x^2 \left(\frac{4}{r^6} - \frac{6}{r^8} + \frac{2}{r^{10}} \right) \right\} \qquad (59)$$

$$- \frac{3 \omega z \sin \beta}{2} \left(\frac{1}{r^6} - \frac{1}{r^8} \right) + \frac{4 \omega^2}{r^6} - \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2}{r^8}$$

Une solution particulière de (59) est:

$$p_{10} = \frac{3}{32} \left\{ - \frac{6}{r^2} - \frac{2}{r^4} - \frac{1}{3r^6} + x^2 \left(\frac{12}{r^4} + \frac{12}{r^6} - \frac{1}{r^8} \right) \right\}$$

$$- \frac{\omega z \sin \beta}{8} \left(\frac{3}{r^4} - \frac{2}{r^6} \right) - \frac{\omega^2}{2r^4} + \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2}{r^6} \qquad (60)$$

En portant cette valeur dans (17), il vient :

$$\Delta \vec{u}_1 = \vec{\text{grad}}\, p_{10} + (\vec{u}_o \vec{\text{grad}})\, \vec{u}_o \qquad (61)$$

Une solution particulière de (61) est :

$$\vec{u}_{10} = \frac{3}{32}\{4 - x\,(\frac{4}{r} - \frac{3}{r^2} + \frac{1}{r^4})\} \quad (1,0,0) \qquad (62)$$

$$+ \frac{3}{32}\{\frac{2}{r} - \frac{3}{r^2} - \frac{1}{r^4} + x^2\,(-\frac{2}{x^3} + \frac{6}{r^4} + \frac{4}{r^5} + \frac{4}{r^6})\}\,\vec{r}$$

$$+ \frac{x}{4}(\vec{\omega} \wedge \vec{r})\,(\frac{2}{r^3} - \frac{3}{r^4}) + \frac{\omega \sin\beta}{16}\{\frac{8}{r} - \frac{6}{r^2} + \frac{1}{r^4}\} \quad (0,0,1)$$

$$-\frac{\omega\, z \sin\beta}{16}\{\frac{3}{r^4} + \frac{2}{r^6}\}\,\vec{r} - \frac{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})}{4\, r^4} - \frac{\omega^2}{2r^4}\,\vec{r} + \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})}{r^6}\,\vec{r}$$

Un calcul élémentaire montre que (62) vérifie bien l'équation (18) div $\vec{u}_{10} = 0$.

Nous devons maintenant calculer $\vec{u}_{11}$ et p_{11} satisfaisant les équations (17) et (18) et telles que $(\vec{u}_{10} + \vec{u}_{11})$ satisfasse à la condition (19). Nous devons donc avoir en particulier :

$$\vec{u}_{11} = -\vec{u}_{10} \qquad \text{pour} \quad r = 1 \qquad (63)$$

Par la méthode de LAMB (1 p.595-596) on trouve :

$$\vec{u}_{11} = \frac{3}{32}\left\{-\frac{3}{r} - \frac{1}{r^3} + \frac{2x}{r^5}\right\}(1,0,0)$$

$$+ \frac{3}{32}\left\{\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^5} - 3x\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^5}\right) - x^2\left(\frac{7}{r^5} + \frac{5}{r^7}\right)\right\}\vec{r}$$

$$+ \frac{x}{4r^5}\,\vec{\omega} \wedge \vec{r} - \frac{\omega \sin\beta}{16}\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{r^3}\right)(0,0,1)$$

$$- \frac{\omega\, z \sin\beta}{16}\left(\frac{2}{r^3} - \frac{7}{r^5}\right)\vec{r} + \frac{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})}{4\, r^5}$$

$$+ \frac{\omega^2}{8}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{3}{r^5}\right)\vec{r} - \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2}{8}\left\{\frac{3}{r^5} + \frac{5}{r^7}\right\}\vec{r} \qquad (64)$$

et

$$p_{11} = -\frac{9}{16}\frac{x}{r^3} + \frac{7}{16}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) - \frac{\omega\, z \sin\beta}{4r^3} + \frac{\omega^2}{4r^3} - \frac{3(\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2}{4r^5} \qquad (65)$$

La solution cherchée est :

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_{10} + \vec{u}_{11} \qquad (66)$$

$$p_1 = p_{10} + p_{11} \qquad (67)$$

I.2.6.3. Principe de comparaison

Le principe de comparaison consiste à vérifier qu'il existe un domaine dans lequel les solutions de STOKES et d'OSEEN tendent asymptotiquement vers la même valeur.

RUBINOW et KELLER ont montré que si dans la solution de STOKES on fait croître r et si dans la solution d'OSEEN on fait décroître s les deux solutions tendent asymptotiquement vers la même valeur.

La solution de STOKES d'ordre 1 satisfait donc à la fois les conditions aux limites sur la sphère et à une certaine distance de la sphère. On peut donc l'utiliser pour calculer des efforts sur celle-ci.

I.2.7. TRAINEE . PORTANCE ET COUPLE

Soit $\vec{f}$ la force exercée par le fluide par unité de surface sur la sphère. Conformément au symbolisme utilisé par LAMB (1 p. 596) on désigne par $\vec{f}_{rx}$, $\vec{f}_{ry}$, $\vec{f}_{rz}$ les composantes de la force $\vec{f}$. Ces composantes s'écrivent sur la surface de la sphère de rayon r :

$$\vec{f}_{rx} = \frac{x}{r}\,\vec{f}_{xx} + \frac{y}{r}\,\vec{f}_{xy} + \frac{z}{r}\,\vec{f}_{xz} \qquad (68)$$

avec pour

$$f_{xx} = - p - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f_{yy} = - p - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (69)$$

$$f_{zz} = - p - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

et

$$f_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = f_{zy}$$

$$f_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = f_{xz} \qquad (70)$$

$$f_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f_{yx}$$

En substituant les valeurs de f_{xx}, f_{xy} et f_{xz} dans les équations (68) nous obtenons :

$$r f_{rx} = - x p + \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) u + \mu \frac{\partial}{\partial x} (xu + yv + zw)$$

$$r f_{ry} = - y p + \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) v + \mu \frac{\partial}{\partial y} (xu + yv + zw) \qquad (71)$$

$$r f_{rz} = - z p + \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) w + \mu \frac{\partial}{\partial z} (xu + yv + zw)$$

ce qui s'écrit finalement avec les variables adimensionnelles choisies :

$$\vec{f} = \frac{V\mu}{a} \{ - \frac{\vec{r}}{r} p + (\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}) \vec{u} + \frac{1}{r} \text{div} (\vec{r} . \vec{u}) \quad (72)$$

u et p étant définis par les équations (12), (13), (41), (42), (66) et (67), la force totale $\vec{F}$ s'obtient en intégrant l'équation (72) sur toute la surface de la sphère . On obtient finalement, compte tenu de (6) :

$$\vec{F} = - 6 \pi \mu a V (1 + \frac{3}{8} Re) + \pi a \mu Re \vec{\omega} \Lambda \vec{V} + O (a \mu VRe) \quad (73)$$

Cette force $\vec{F}$ peut être décomposée en deux :

- une composante de trainée $\vec{F}_T$ dans la direction de $-\vec{V}$;
- une composante de portance $\vec{F}_p$ normale à $\vec{V}$.

$$\vec{F}_T = - 6 \pi \mu a \vec{V} \{ 1 + \frac{3}{8} Re + O (Re)\} \quad (74)$$

$$\vec{F}_p = \pi a^3 \rho \vec{\Omega} \Lambda \vec{V} \{1 + O (Re) \} \quad (75)$$

Le couple des forces hydrodynamiques s'obtient en intégrant le produit $\vec{r} \Lambda \vec{f}$ sur toute la sphère et on obtient :

$$\vec{T} = - 8 \pi \mu a^3 \vec{\Omega} \{1 + 0 (Re)\} \qquad (76)$$

Les expressions de $\vec{F}_T$ et $\vec{F}_P$ méritent quelques remarques :

la force de portance $\vec{F}_P$ est indépendante de et son expression est semblable à celle trouvée dans le cas d'un écoulement à potentiel bidimensionnel autour d'un profil .

dans l'expression de $\vec{F}_T$, le terme $- 6 \pi \mu a \vec{V}$ a été calculé par STOKES (1861) et le second terme $- \frac{9}{4} \pi \mu a \vec{V} Re$ a été mis en évidence par OSEEN en 1910.

l'expression de $\vec{F}_P$ est beaucoup plus récente (1961) et est due à RUBINOW et KELLER.

la détermination du couple $\vec{T} = - 8 \pi \mu a^3 \vec{\Omega}$, est due à KIRCHHOFF (1876).

Ces résultats montrent d'une part que la rotation de la sphère sur elle-même n'influe pas sur la force de trainée. D'autre part, que dans les solutions de première approximation il n'y a pas lieu d'introduire de corrections en fonction du nombre de Reynolds en ce qui concerne la force de portance et le couple.

I. 3. COMPORTEMENT D'UNE SPHERE DANS UN ECOULEMENT A GRADIENT DE VITESSE

En théorie la méthode proposée par RUBINOW et KELLER peut s'appliquer à l'écoulement à gradient de vitesse en milieu infini d'un fluide visqueux autour d'une sphère animée d'un mouvement de rotation. Toutefois, il conviendrait de reprendre entièrement les calculs

puisque, en particulier, la solution vérifiant les conditions à l'infini serait différente de la solution d'OSEEN.

RUBINOW et KELLER ont essayé de faire ce calcul mais se sont très rapidement heurtés à des difficultés inextricables notamment dans la détermination de l'approximation de l'ordre 1. Dans leur publication (7) , ils qualifient les calculs correspondants de"démentiels".

Nous n'avons pas tenté de mener à bien ces calculs pour les raisons suivantes :

- du point de vue pratique, l'existence du gradient de vitesse est essentiellement due à la présence d'une paroi fixe. Il faudrait donc dans des calculs déjà extrêmement complexes, introduire une condition limite supplémentaire représentant l'influence de cette paroi.

- d'autre part, la solution qui pourrait être établie ne serait valable que pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds et ne pourrait pas s'appliquer à l'écoulement de transition autour de la sphère.

Nous avons néanmoins utilisé les résultats obtenus par RUBINOW et KELLER afin de suggérer une expression des forces qui s'exercent sur une sphère placée dans un écoulement à gradient de vitesse en milieu infini. Si cette expression ne constitue qu'une représentation très approchée des phénomènes, elle nous a été très précieuse dans l'interprétation des résultats de nos expériences.

I.3.1. ETUDE EN MILIEU INFINI

L'établissement de cette relation est basé sur la remarque suivante :

- la solution proposée par RUBINOW et KELLER montre que la rotation d'une sphère placée dans un écoulement uniforme n'a pas d'influence sur la force de trainée mais fait apparaître une force de portance et un couple. On peut donc considérer que la rotation de cette particule a pour effet de superposer couple et portance à la force de trainée.

Partant de ce principe, nous avons considéré l'écoulement à l'infini comme la superposition d'un écoulement uniforme et d'un écoulement à gradient et nous avons supposé que l'influence du gradient ne faisait que superposer une force de portance et un couple à la force de trainée due à l'écoulement uniforme. La force de trainée a une expression identique à celle déduite des extensions de STOKES et OSEEN.

Le couple dû au gradient de vitesse a pour effet de faire tourner la particule sur elle-même à une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$. En première approximation, on peut prendre :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{ rot } \vec{u} \qquad (77)$$

ainsi que l'a montré EINSTEIN (1906). On se trouve, dans ces hypothèses, ramené à un cas identique à celui traité par RUBINOW et KELLER et la force de portance s'exprime par :

$$\vec{F}_P = \frac{\pi}{2} a^3 \text{ rot } \vec{u} \; \vec{V}_r \qquad (78)$$

dans laquelle $\vec{V}_r$ représente la composante uniforme de l'écoulement c'est-à-dire la vitesse relative de la bille par rapport au fluide.

Ces relations ne sont évidemment pas entièrement satisfaisantes car,ainsi que nous l'avons souligné, elles ne sont valables que pour des très faibles nombres de Reynolds et ne tiennent pas compte de l'influence des parois.

I.3.2. ETUDE EN MILIEU FINI

La proximité de parois solides, en imposant de nouvelles conditions aux limites, modifie l'écoulement autour de la sphère et par suite l'expression des forces de trainée et de portance ainsi que de la vitesse de rotation.

De nombreuses études expérimentales ont été effectuées pour tenir compte de cette influence sur la vitesse de chute des particules sphériques dans un milieu confiné. On a ainsi mis en évidence que la présence d'une paroi a pour effet de diminuer la vitesse de chute, c'est-à-dire, d'augmenter les forces de trainée.

Parmi les formules proposées nous citerons celle de FAYON et HAPPEL qui donne une expression du coefficient de trainée en milieu fini :

$$C_D = C_A + C_S \left\{ \frac{2{,}105(d/D) - 2{,}087\,(d/D)^3 - 2/3\,(1-\beta^2)^{-1}(d/D)^2}{1 - 2{,}105\,(d/D) + 2{,}087\,(d/D)^3} \right\} \qquad (79)$$

avec

C_A : coefficient de trainée en milieu infini
C_S : coefficient de trainée de STOKES
d : diamètre de la particule
D : diamètre du tube

On peut prévoir que,dans le cas de nos expériences, la force de trainée déduite de la théorie de STOKES devra être corrigée d'un facteur comparable à celui introduit par FAYON et HAPPEL.

En ce qui concerne la force de portance, l'inter-réaction entre la paroi et la bille a pour effet d'éloigner cette dernière de la paroi. A la force de portance due à l'existence du gradient de vitesse, il conviendra donc d'ajouter une force caractéristique de cette inter-réaction. L'expression de la force de portance sera donc :

$$\vec{F}_P = \vec{F}_{P1} + \vec{F}_{P2} \qquad (80)$$

avec $$\vec{F}_{P1} = \frac{\pi}{2} a^3 \rho \ \text{rot} \ \vec{u} \ \vec{V}_r \qquad (81)$$

et $\vec{F}_{P2}$ = une fonction caractéristique de l'influence de la paroi (82)

Quant au couple hydrodynamique, c'est-à-dire la vitesse de rotation de la bille, elle doit être vraisemblablement elle aussi influencée par la proximité de la paroi.

L'étude expérimentale que nous avons développée a eu pour objet non seulement de vérifier les hypothèses ci-dessus mais aussi de déterminer l'expression et la valeur numérique des différentes grandeurs dans un certain domaine.

CHAPITRE II

INSTALLATIONS EXPERIMENTALES

II. 1. PREMIERE INSTALLATION EXPERIMENTALE

Une première installation expérimentale a été réalisée dans le but de dégrossir le problème.

Cette installation nous a permis de vérifier qualitativement les hypothèses qui sont à la base de notre étude, de préciser les caractéristiques à donner à l'installation expérimentale définitive et de mettre au point les méthodes de mesure.

Cette installation comprend (Figure 1) :

- un réservoir d'huile d'un volume de 1 m^3 ;
- une pompe MOUVEX volumétrique à piston rotatif entraînée par l'intermédiaire d'un variateur de vitesse ;

- une chambre de tranquillisation amont ;
- un convergent équipé d'ailettes destinées à régulariser l'écoulement dans l'huile ;
- un tube borizontal en plexiglass d'une longueur de 4 mètres et d'un diamètre de 8 centimètres (:) ;
- un système permettant d'introduire des particules sphériques à l'intérieur du tube ; (Figures 2, 3,) ;
- un système de fixation de la particule sphérique (Figure 4) ;
- une chambre aval équipée d'un dispositif permettant de récupérer les sphères introduites dans l'écoulement ;
- un réservoir de réception aval.

L'installation est alimentée en huile BAYOL, le débit est réglé au moyen d'une vanne et d'un by-pass court-circuitant le tube d'expérience.

Les débits sont mesurés par jaugeage dans le réservoir aval. Les vitesses locales sont mesurées soit au moyen d'un tube de Pitot mobile suivant un diamètre du tube, soit par chronophotographie. Le montage du tube de Pitot est représenté sur les figures 5 et 6.

(:) En cas de nécessité, il est possible de modifier le diamètre du tube d'expérience.

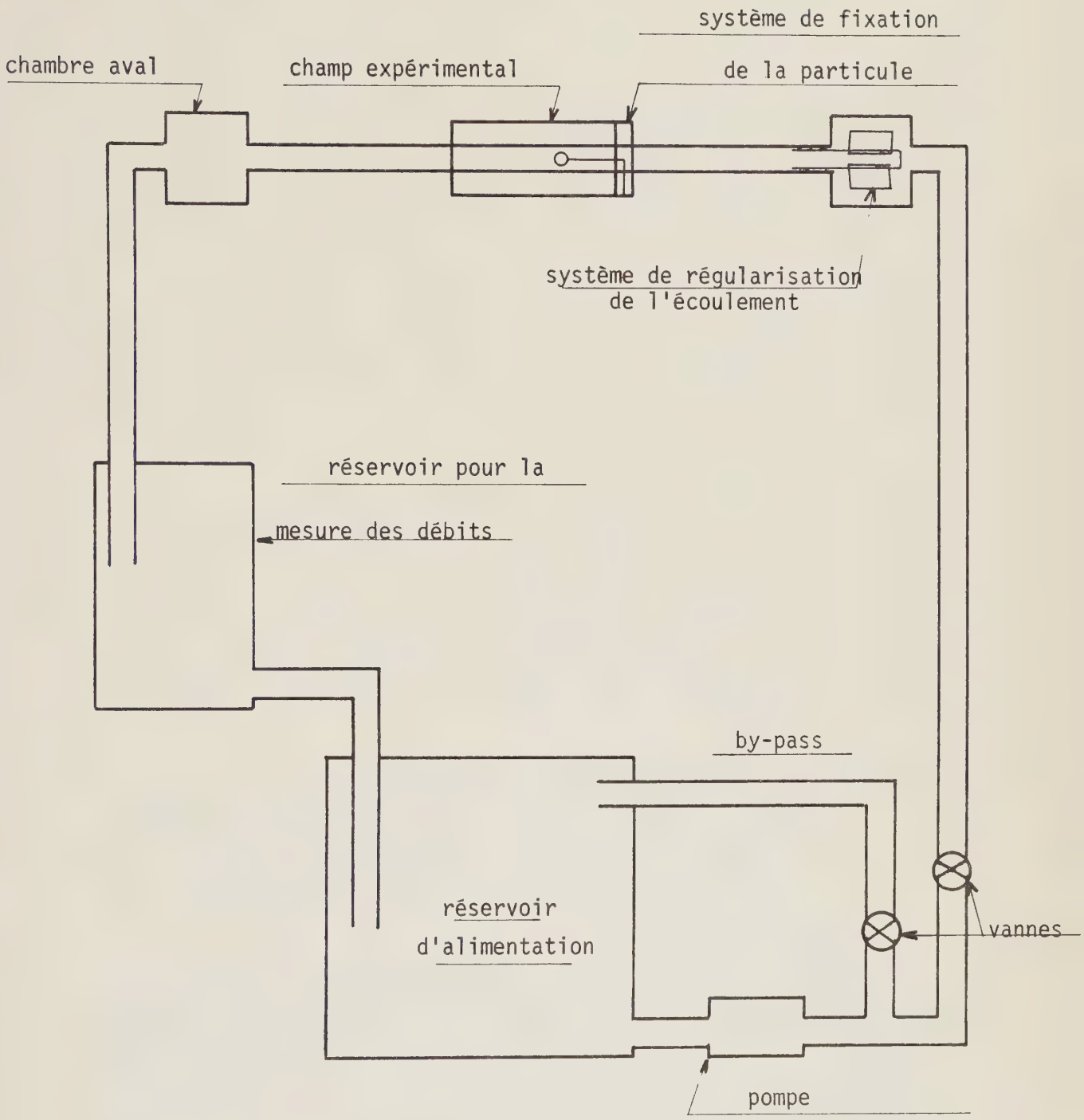


Fig. 1 - SCHEMA GENERAL DE LA PREMIERE INSTALLATION

Le mouvement de la particule ou sa position d'équilibre est déterminé par observation photographique. Cette observation photographique, également utilisée pour la chronophotographie, est réalisée de la façon suivante (Figure 7) :

Une enceinte parallélipipédique remplie du même fluide que celùi qui circule dans l'installation entoure le tube d'expérience et permet d'éviter les aberrations dues au dioptre cylindrique.

Tout l'ensemble de la zone d'expérience, à l'exception d'une série de fentes et d'une fenêtre de prises de vues, est opacifié à la peinture mate afin d'éviter des réflexions parasites. On peut ainsi obtenir un éclairage intense et très contrasté dans un plan diamétral vertical. L'éclairage est réalisé soit au moyen d'une lampe à halogène,soit au moyen d'un stroboscope électronique.

Pour permettre d'appliquer la méthode chronophotographique et pour obtenir sur un seul cliché de bonne qualité plusieurs positions successives de la bille, il a fallu procéder à une mise au point très minutieuse de cette installation.

L'appareil photographique utilisé est un NIKON 24 x 36 permettant de prendre jusqu'à quatre clichés par seconde. Les émulsions utilisées sont des émulsions à grain fin et à contraste. (ILFORD).

Les températures sont mesurées au moyen de thermomètres immergés dans les chambres amont et aval.

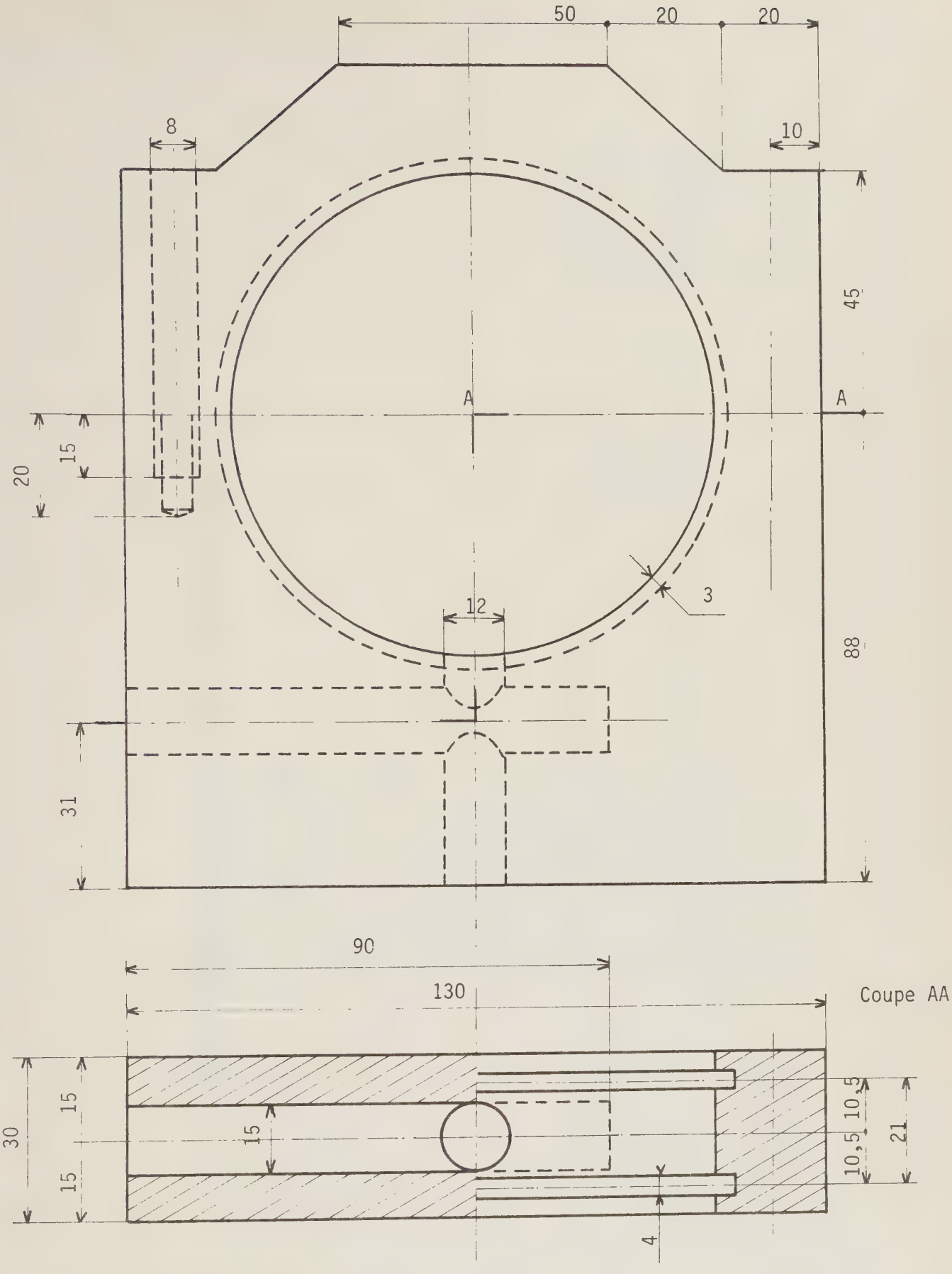


Fig.2 - SYSTEME PERMETTANT D'INTRODUIRE LES PARTICULES DANS LE TUBE EXPERIMENTAL

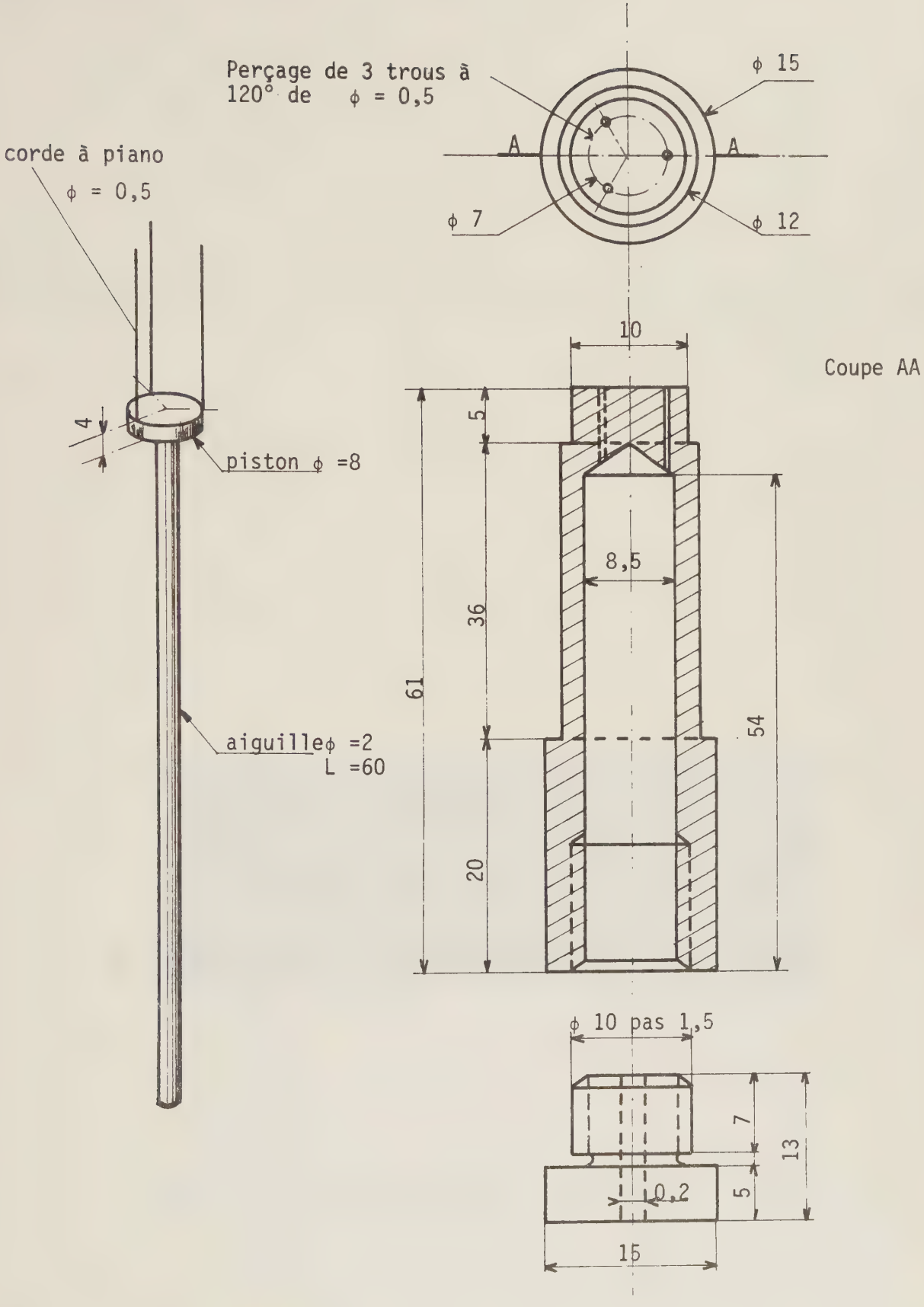
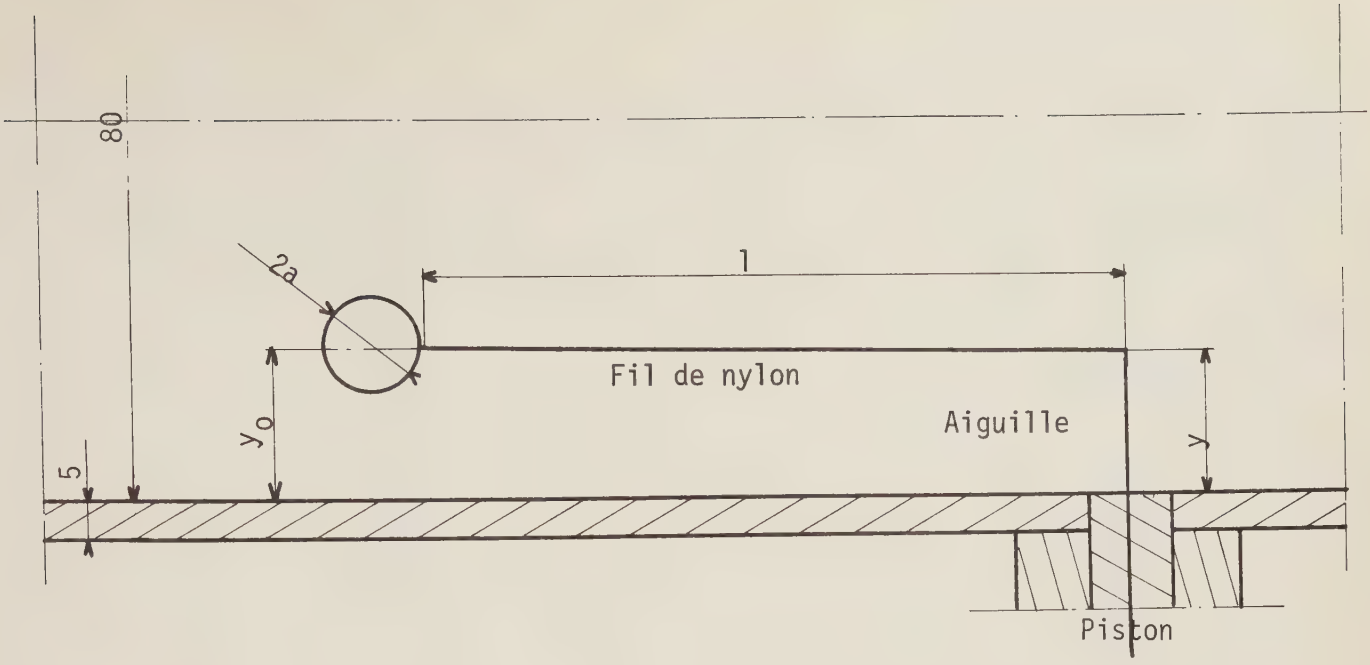


Fig.3 - PISTON PERMETTANT L'INTRODUCTION DES PARTICULES DANS LE FLUIDE



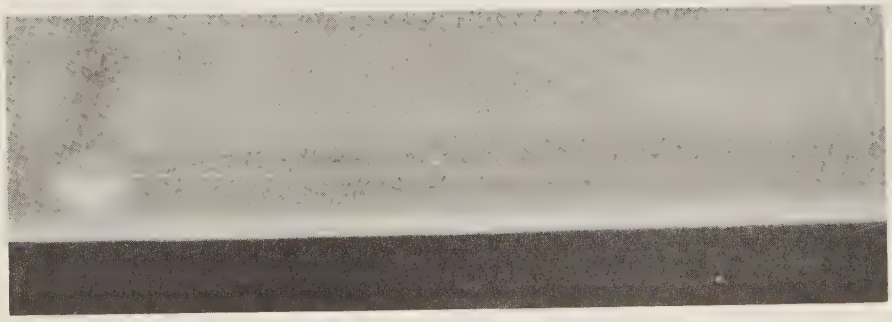


Fig.4 - SYSTEME DE FIXATION DE LA PARTICULE

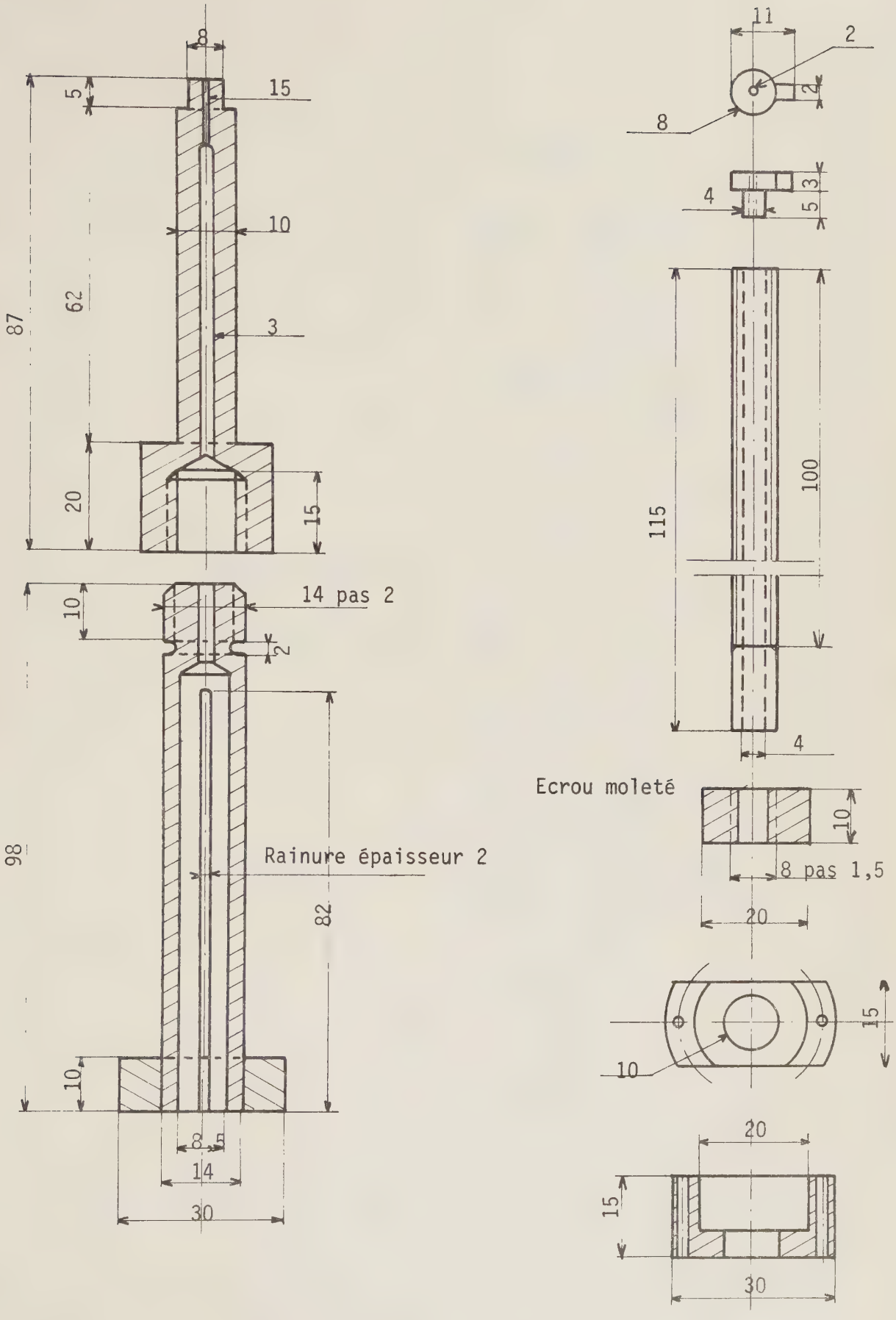


Fig.5 - CORPS D'UN TUBE DE PITOT

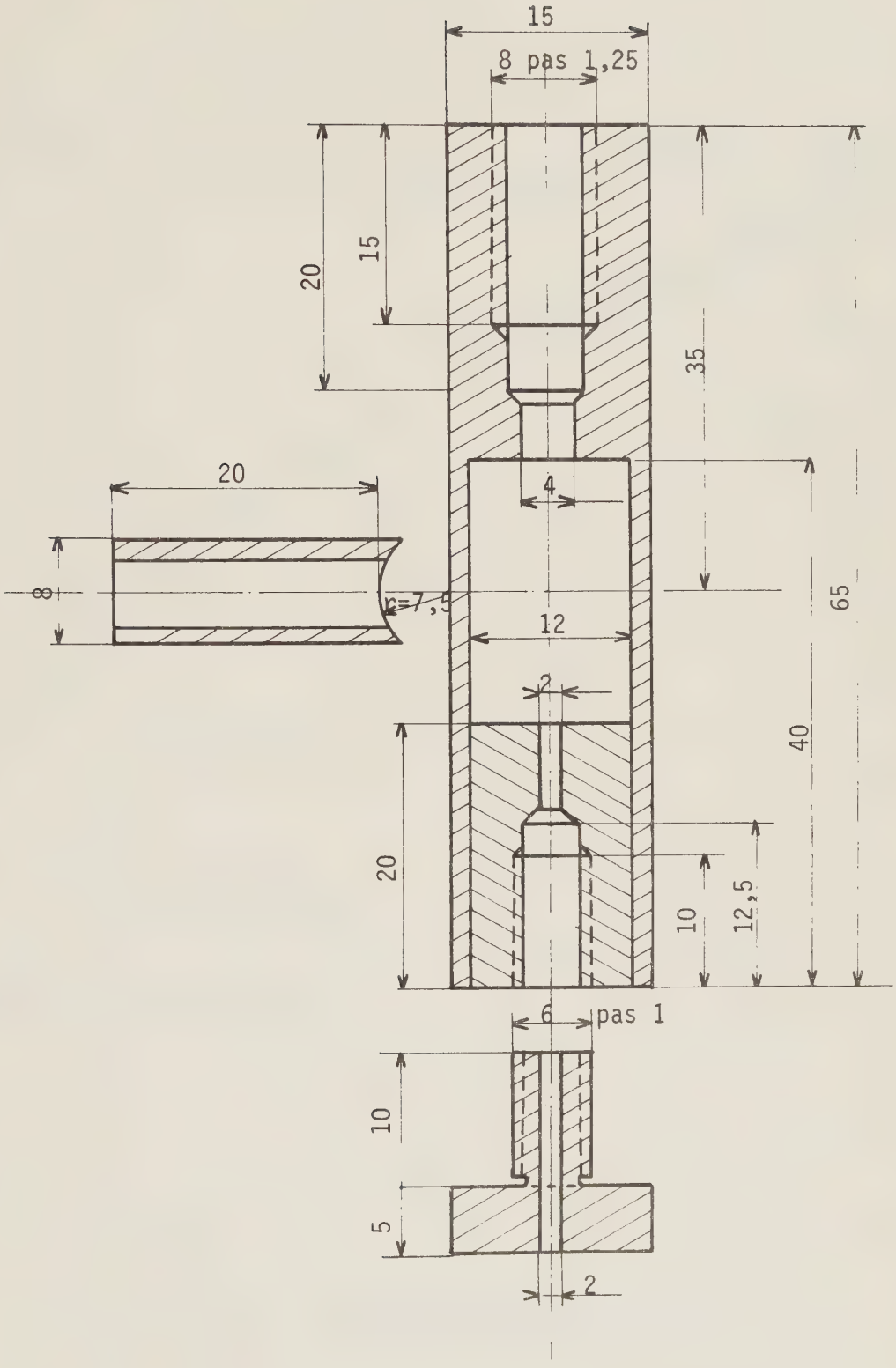


Fig.6 - CORPS D'UN TUBE DE PITOT - COMPLEMENT

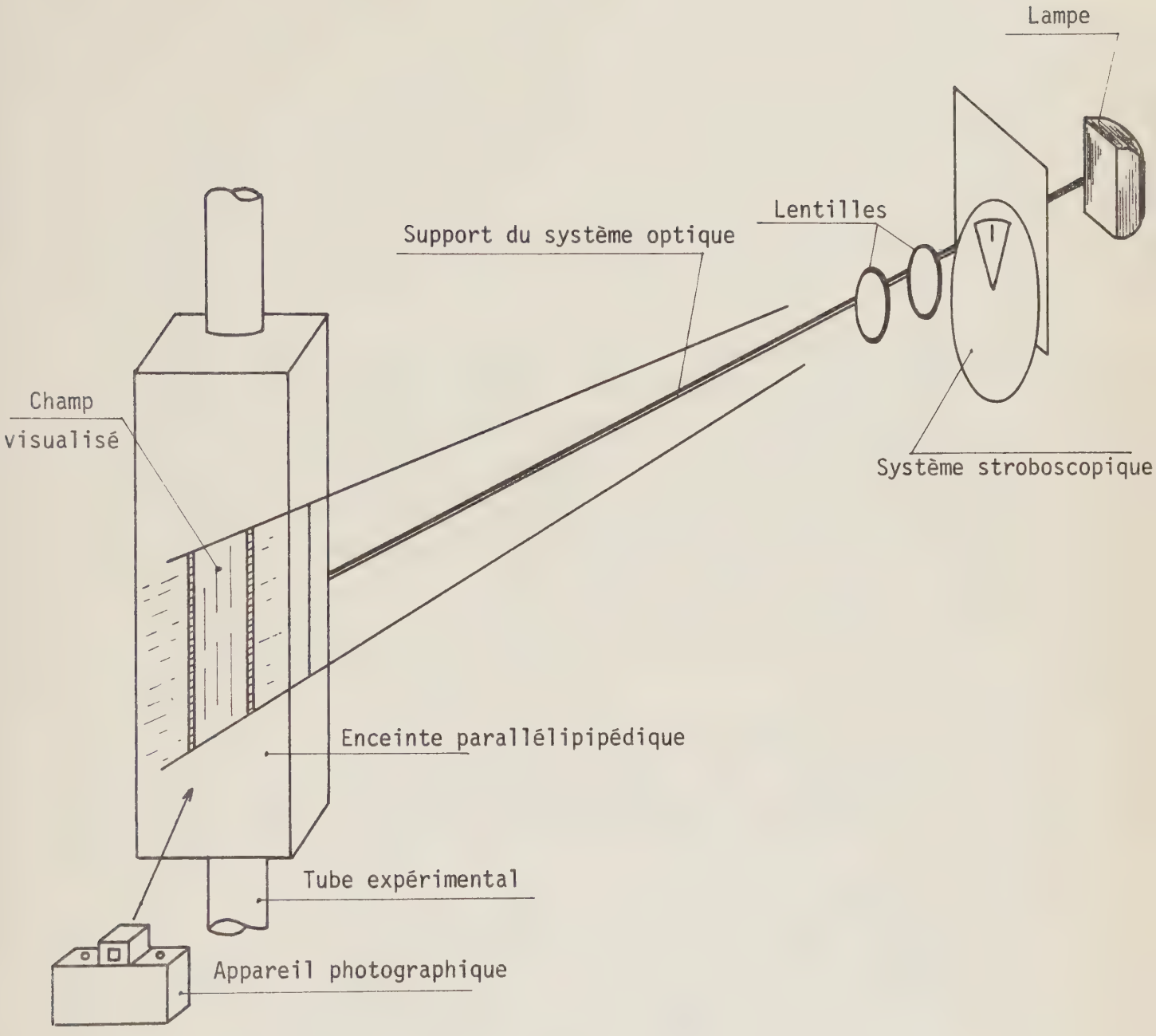


Fig.7 - SYSTEME DE PRISE DES CLICHES

Deux séries d'expériences ont été réalisées sur cette installation.

Dans la première série, pour différents débits, on a laché à vitesse nulle des particules sphériques le long de la génératrice inférieure du tube. On a pu ainsi observer que pour les faibles débits, ces particules roulent pratiquement sans glisser le long de la génératrice inférieure du tube et que pour des débits importants, ces particules parcourent des trajectoires de saltation qui les éloignent d'autant plus de la paroi du tube que les débits sont plus importants. Dans ce mouvement, les particules tournent sur elles-mêmes.

Cette observation permet de conclure à l'existence d'une force de portance et d'un couple de cisaillement mais ne permet pas de mesure quantitative pour les deux raisons suivantes :

- les débits pour lesquels on observe les trajectoires de saltation sont à la limite de l'écoulement laminaire et on ne peut pas être certain que la distribution des vitesses reste uniforme pendant la durée d'une expérience ;

- le système destiné à lacher la bille peut communiquer des impulsions qu'il est difficile de contrôler.

La deuxième série d'expériences a consisté à étudier le comportement d'une particule immobilisée dans l'écoulement. La bille est reliée au système de fixation déjà décrit (Figure 4) par un fil de nylon de 15 deniers. On a pu observer qu'à partir d'une certaine valeur du débit dans le tube, la bille s'immobilise à une certaine distance de la paroi. Le système d'attache est prévu de sorte qu'on puisse régler la hauteur du point d'attache en fonction de la position d'équilibre de la bille. De cette façon, le fil de nylon se trouve parallèle à l'écoulement et il n'y a pas d'influence du système de fixation sur la position d'équilibre prise par la bille.

Cette série d'expériences a mis en évidence une force de portance due à la dissymétrie de l'écoulement et à la présence d'une paroi fixe. Cependant le phénomène observé dans ce cas-là est essentiellement différent du phénomène réel. En effet, la liaison complémentaire imposée à la particule par le fil d'attache prive cette dernière d'un degré de liberté. La particule n'a plus la possibilité de tourner sur elle-même et le phénomène s'en trouve profondément modifié.

II.2. DEUXIEME INSTALLATION EXPERIMENTALE

II.2.1. DESCRIPTION

Compte tenu des expériences précédentes, nous avons imaginé et réalisé une deuxième installation qui nous a permis d'étudier

qualitativement et quantitativement le comportement d'une particule sphérique, parfaitement libre de tous ses mouvements, placée dans un écoulement laminaire à gradient de vitesse.

Cette installation comprend (Figure 8) :

- un système d'alimentation et de réception (cuves, pompe et variateur) identique à celui décrit précédemment ;
- un tube de plexiglass muni d'une chambre de tranquillisation amont et d'une chambre de récupération des particules à l'aval. L'ensemble de ce système, contrairement à l'installation précédente, est mobile autour d'un axe horizontal de telle sorte que le tube d'expérience peut tourner dans un plan vertical d'un angle de 360°. Le tube de plexiglass est raccordé aux installations fixes au moyen de tuyau souple ;
- un système permettant d'introduire les particules dans l'écoulement (voir Figures 2 et 3) ;
- un système de tranquillisation comportant des chicanes et un massif de billes de verre,placé entre la pompe et le tube d'expériences. En effet, les premières expériences ont montré que la pompe engendrait un écoulement légèrement pulsé qui perturbait le phénomène et risquait de fausser le tube.

II.2.2. SYSTEMES DE MESURES

II.2.2.1. Mesure de la répartition des vitesses

Dans cette installation nous avons supprimé le système de mesure des vitesses par le tube de Pitot.

Les premières expériences ont en effet montré qu'il était possible de calculer théoriquement la vitesse en un point quelconque d'un diamètre. Cependant, nous avons vérifié cette répartition au moyen du système de chronophotographie. L'écoulement était visualisé au moyen de petites bulles d'air emprisonnées dans le liquide et d'une dimension suffisamment petite pour que leur vitesse soit pratiquement égale à celle du fluide. Ces bulles existent naturellement dans l'écoulement et l'on a vérifié que leur présence ne modifiait pas les caractéristiques du fluide.

Les clichés sont pris en utilisant le système d'éclairage décrit au paragraphe suivant et un appareil photographique dont le déclenchement est synchronisé avec le mouvement du disque. La longueur de la trace laissée sur le cliché par chaque bulle est proportionnelle au chemin parcouru par celles-ci pendant la durée d'exposition. Il est donc possible, connaissant cette durée d'exposition, de calculer la vitesse de chaque bulle et d'en déduire la loi de répartition des vitesses.

A titre d'exemple, nous donnons (Figure 9) quelques courbes montrant la bonne concordance entre les résultats expérimentaux et théoriques.

II.2.2.2. Repérage de la position de la bille dans le tube.

Le système utilisé est celui décrit précédemment. Deux modifications ont été apportées à ce système pour obtenir une meilleure définition de la position de la bille et une précision plus grande sur la distance séparant deux positions successives de celle-ci.

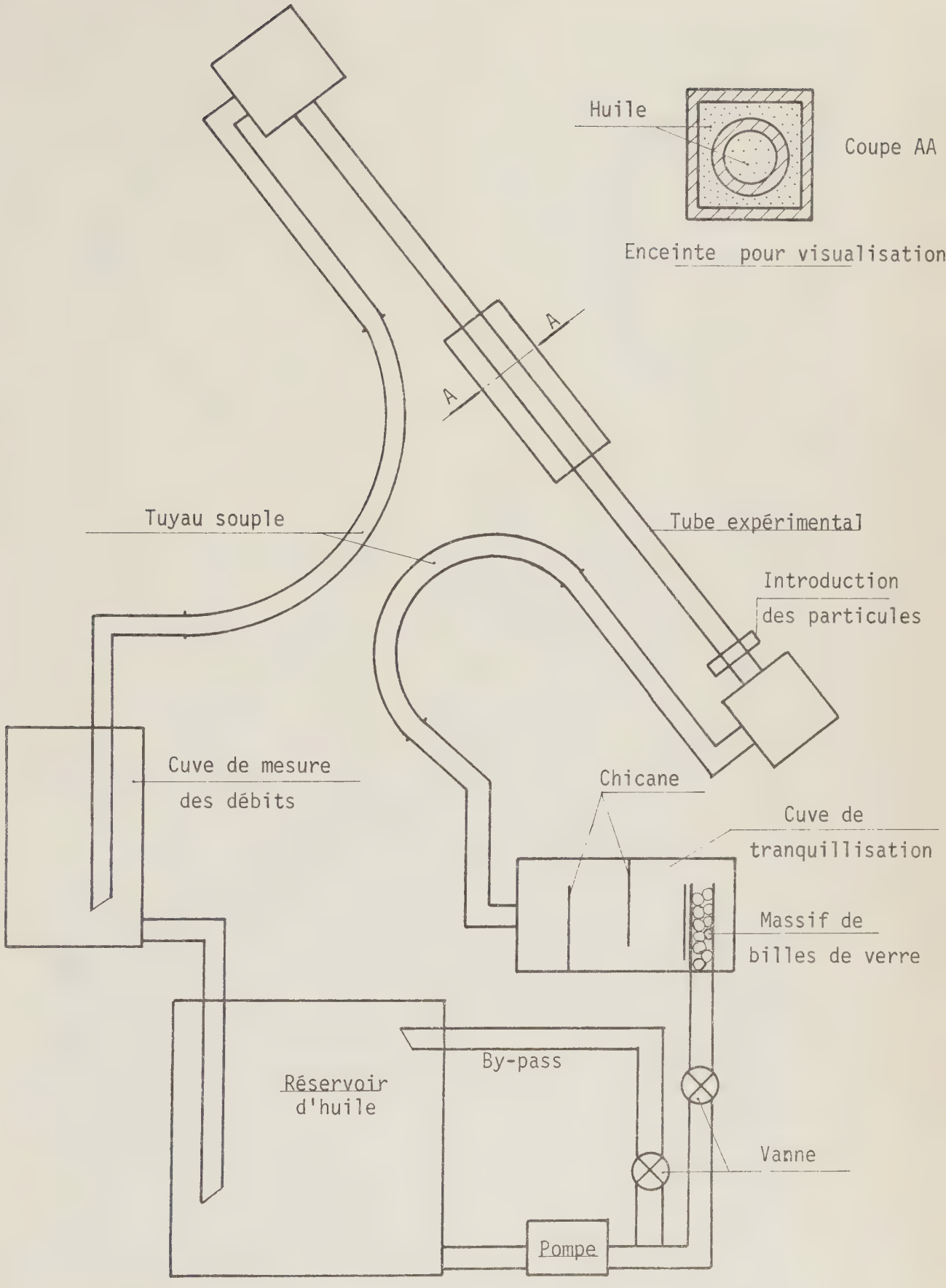
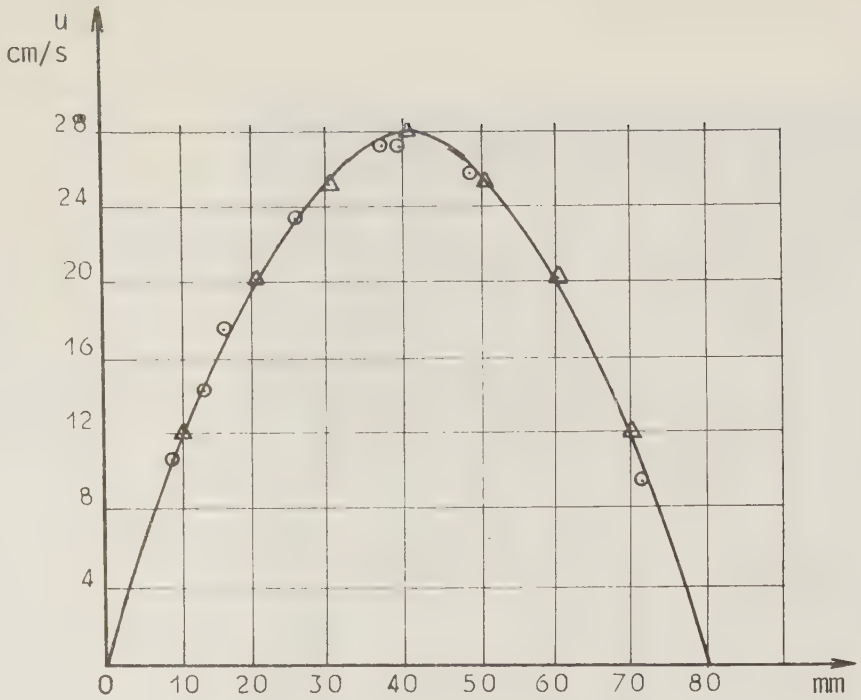
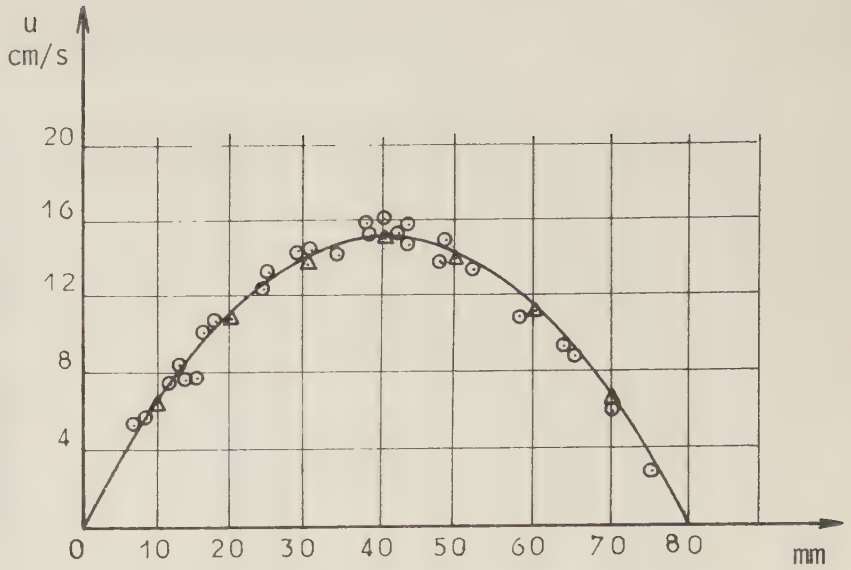
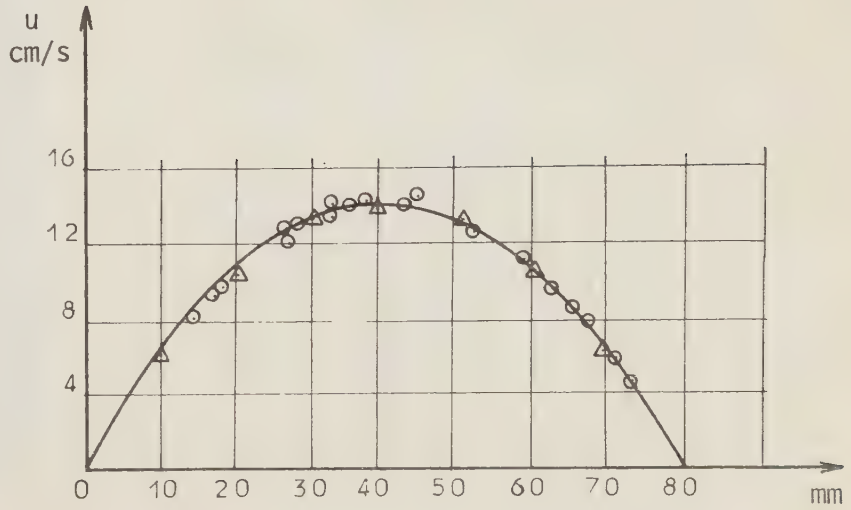


Fig.8 - SCHEMA GENERAL DE L'INSTALLATION







⊙ Points expérimentaux

△ Points théoriques

Fig.9 - COURBE DE REPARTITION DES VITESSES

Nous avions en effet remarqué que le relevé de la position de la bille par rapport à l'une des parois du tube était assez imprécise , les contours du tube étant assez flous sur le cliché. Nous avons donc placé, à l'intérieur de l'enceinte qui entoure le tube, dans le champ expérimental, deux fils très fins et brillants dont la position par rapport à la génératrice intérieure du tube a été très soigneusement repérée à l'aide d'un cathétomètre.

La figure 10 donne un cliché pris au cours de nos expériences et sur lequel on aperçoit très clairement les deux fils brillants.

Figure 10

D'autre part, nous avons remplacé le stroboscope électronique précédemment utilisé par un système plus facile à manipuler et beaucoup plus sur. Un moteur synchrone doté d'un réducteur entraîne un disque à un tour par seconde muni de fenêtres placé devant une fente violemment éclairée. L'éclairage est réalisé au moyen d'une lampe à halogène (lampe de quartz à gaz iodique de 1000 watts) munie de système optique de focalisation. En changeant le disque on peut régler à volonté la fréquence et la durée des éclairs.

II.2.2.3. Mesure des débits

Les débits sont mesurés par une méthode de jaugeage identique à celle de nos premières expériences. Dans certains cas, et notamment quand on étudie le comportement de la bille très près de la paroi, nous avons été conduit à réaliser un réglage très fin du débit. Ce réglage est obtenu au moyen d'une vanne spéciale constituée d'un cylindre percé le long d'une génératrice de 30 tours de 3 mm de diamètre. A l'intérieur de ce cylindre, le déplacement d'un piston permet de découvrir ces trous un par un. La mesure des débits correspondants est effectuée directement par jaugeage.(Figure 11).

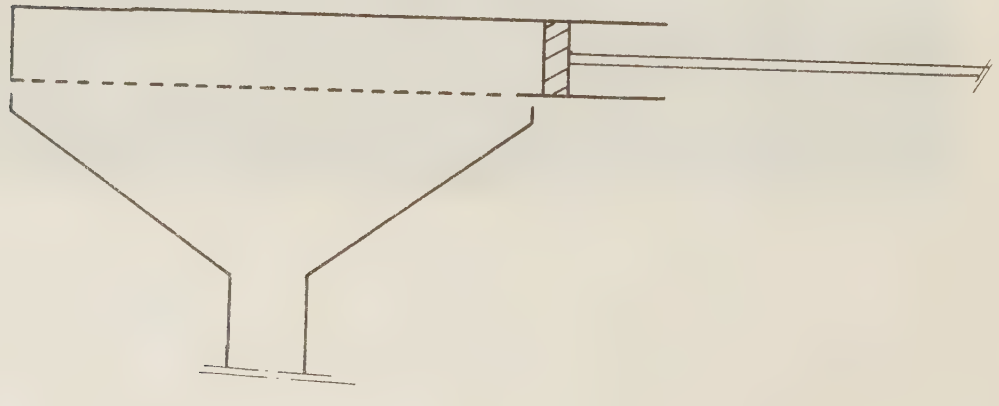


Figure 11

II.3. REALISATION ET CHOIX DES PARTICULES

II.3.1. REALISATION DES PARTICULES

Les particules utilisées sont sphériques ; leur choix et leur réalisation ont été particulièrement délicats. Initialement, nous avons utilisé des sphères trouvées dans le commerce (perles en matière plastique) . Leur masse spécifique étant trop importante, nous les avons évidées à l'aide d'une petite fraise.

Lorsqu'on place de telles particules dans un écoulement à gradient de vitesse, celles-ci, en général, ne tournent pas sur elles-mêmes contrairement à la théorie. L'explication du phénomène est la suivante :

Considérons une bille de rayon a . Cette particule placée dans un écoulement à gradient va être soumise à un couple dont l'expression, d'après la théorie, est :

$$C = - 8 \pi \mu a^3 \Omega$$

En première approximation, prenons $\Omega = \frac{1}{2}$ rot u.

D'où :

$$C = 4 \pi a^3 \mu \text{ rot } u$$

u étant la vitesse locale, nous avons :

$$u = 2 U \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

avec $U = \frac{Q}{S}$ vitesse moyenne

R = rayon du tube d'expérience

r = distance de l'axe du tube au centre de la bille

μ = viscosité dynamique du fluide utilisé.

D'où l'on tire :

$$\text{rot } u = - \frac{4 U r}{R^2}$$

Dans le cas de nos expériences, les ordres de grandeur des différents termes sont les suivants :

$a \simeq 3$ mm

$\mu \simeq 40.10^{-2}$ UCGS

$U \simeq 10$ cm / sec

$r \simeq 30$ mm

$R \simeq 40$ mm

On trouve ainsi que le couple de cisaillement est de l'ordre de 1 dyne x cm.

Dans le cas où la sphère présente un défaut de sphéricité la résultante des forces dues à la pesanteur ne passe pas par le centre de poussée et crée un couple qui s'oppose à la rotation de la bille. Le poids des billes utilisées étant de 130 dynes, un calcul élémentaire montre que ce couple antagoniste atteint la valeur de 1 dyne x cm dès que l'excentricité dépasse 1/10ème de millimètres. Il est donc essentiel pour l'observation du phénomène de réaliser des billes d'une homogénéité et d'une sphéricité aussi précises que possible.

Nous avons admis qu'il était nécessaire de disposer de sphères constituées de matériaux homogènes calibrées à 1/100ème de millimètres près. N'ayant pu trouver dans le commerce de telles sphères dans les matériaux recherchés, nous avons dû les réaliser nous-même à l'aide de l'appareil décrit ci-dessous (Figure 12) :

Deux plateaux parallèles, emboités l'un dans l'autre, tournent en sens inverse. Le plateau inférieur est muni de rainures circulaires excentrées de différentes profondeurs. L'écartement entre les deux plateaux peut être réglé de façon très précise.

Les ébauches des sphères en plexiglass ou en araldite sont introduites dans une des rainures et sont rodées au moyen d'une pate spéciale de plus en plus fine jusqu'à l'obtention d'une sphère parfaite. Les sphères obtenues sont vérifiées au moyen d'un lecteur de profil.

L'état de surface de ces sphères peut être également travaillé en remplaçant la pate à roder par de la pate à polir. Ce système permet de réaliser des billes d'un diamètre compris entre 1 et 10 mm avec une tolérance du centième de millimètre et des états de surface particulièrement soignés.

Détermination des caractéristiques des particules

Nous avons fabriqué ainsi une série de billes dont les caractéristiques ont été déterminées de la façon suivante :

- le poids est déterminé grâce à une balance de type METTLER avec une précision de 1/10ème de mg ;

- le rayon est mesuré au lecteur de profil avec un agrandissement de 50. On peut donc espérer une précision sur la mesure du diamètre de 1/100ème de mm;

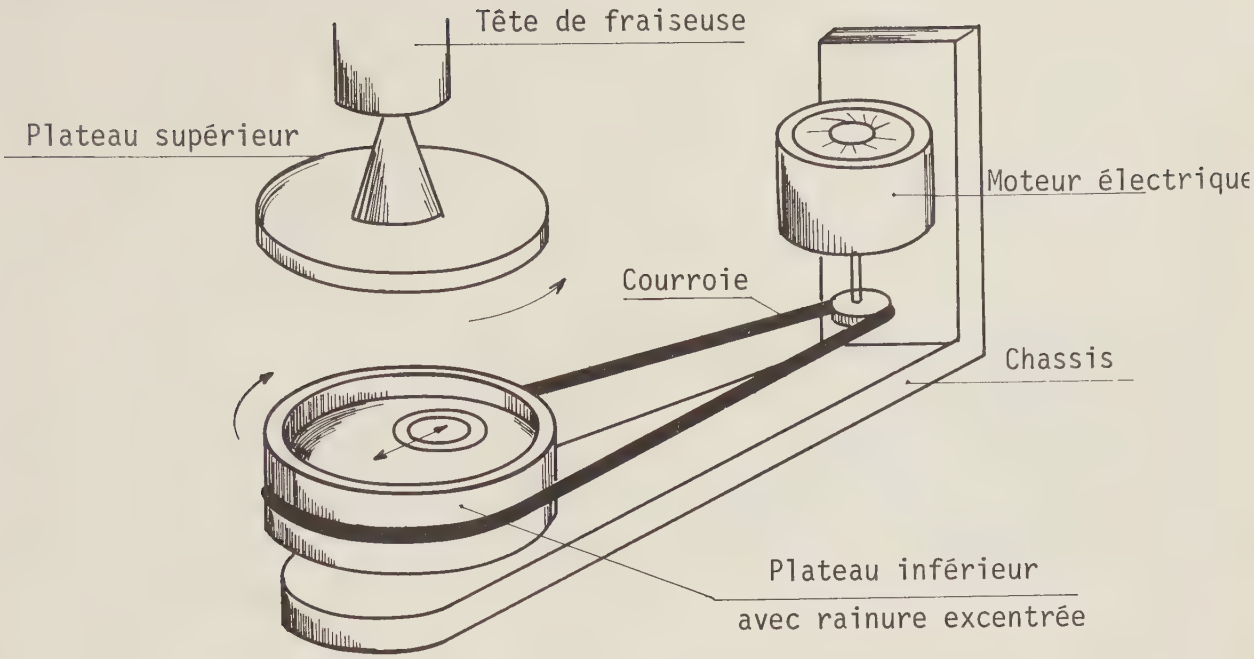
- le volume est vérifié par jaugeage à l'aide d'un pycnomètre;

- la masse spécifique est calculée directement. Cette masse spécifique est de l'ordre de 1,20.

II.3.2. CHOIX DES PARTICULES

Parmi toutes les sphères ainsi réalisées, nous en avons retenues 20 d'un diamètre compris entre 5 et 8 mm, et d'une masse spécifique de l'ordre de 1,20 gr par cm^3. Cet échantillonnage qui peut paraître restreint, nous a été dicté par les considérations suivantes :

1. - On sait que le rapport $\frac{a}{R}$ du rayon d'une particule au rayon du tube a une influence sur le phénomène et que cette influence devient prépondérante quand le rapport $\frac{a}{R}$ croît. Nous avons cherché à limiter cette influence en maintenant au rapport $\frac{a}{R}$ une valeur relativement faible et c'est la raison pour laquelle nous n'avons pas utilisé de sphères de diamètre supérieur à 8 mm. Les résultats obtenus ont montré que même dans ce cas le rapport $\frac{a}{R}$ a une légère influence dont il est nécessaire de tenir compte.



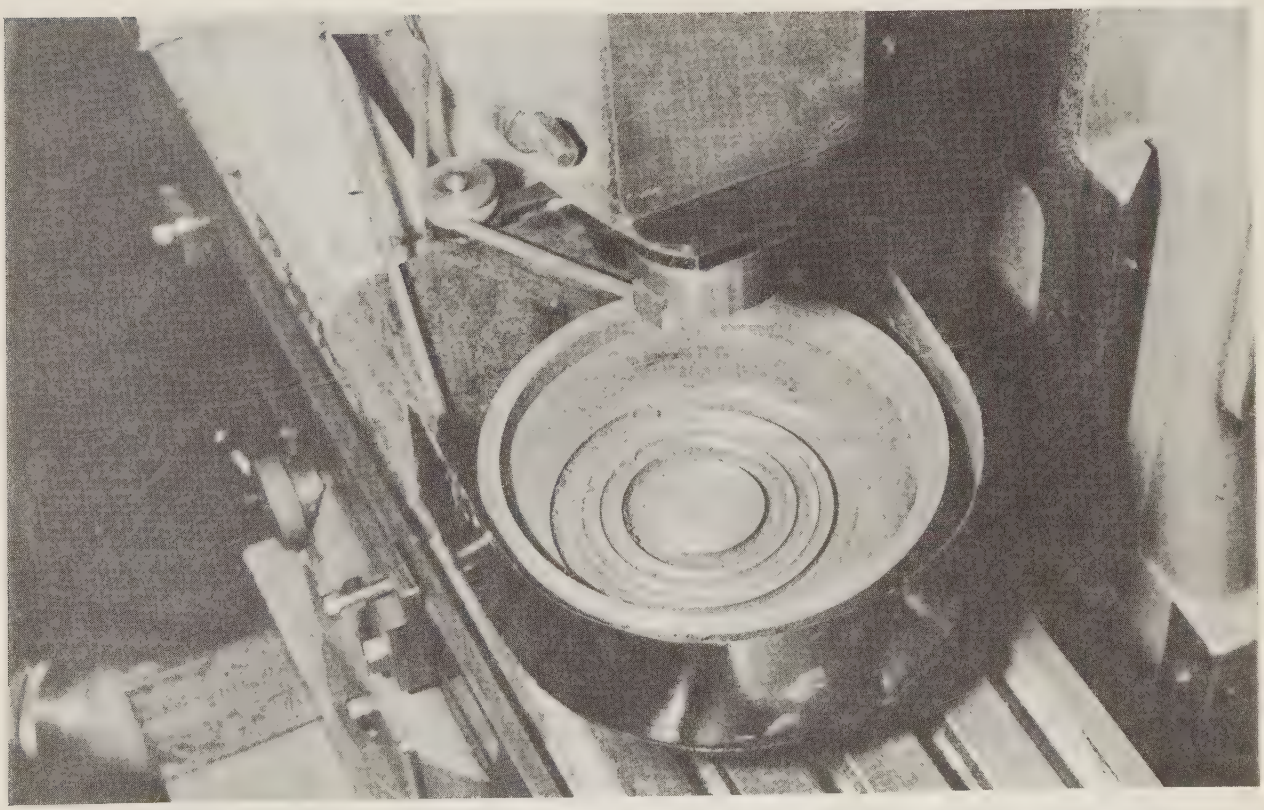


Fig.12 - FABRICATION DES PARTICULES SPHERIQUES

2.- Pour permettre une observation photographique précise du mouvement des particules, il faut que ces particules aient une dimension minimum afin notamment d'observer leur vitesse de rotation. C'est la raison pour laquelle, compte tenu des performances du système d'observation, nous avons limité à 5 mm la dimension minimum des sphères.

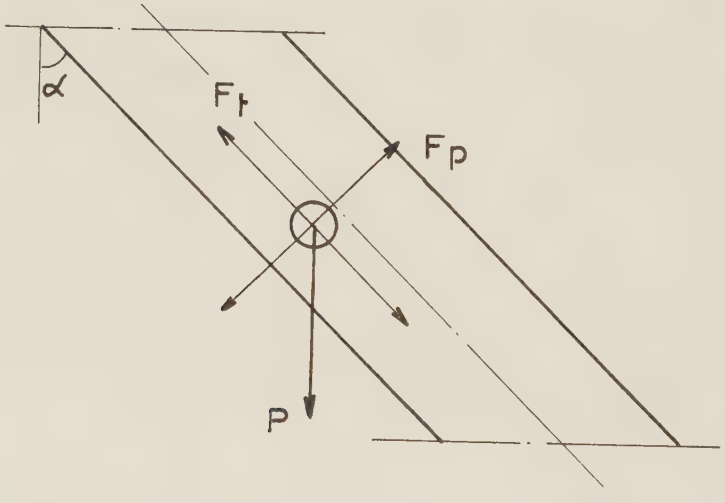
3.- Toujours pour permettre des observations photographiques précises des particules, il importe que la vitesse absolue de celles-ci reste comprise dans certaines limites. Or, la vitesse absolue de ces billes résulte de la différence entre leur vitesse relative, peu différente de leur vitesse de chute, et de la vitesse d'entraînement sensiblement égale à la vitesse locale du fluide. Puisque nous nous sommes imposés une étude en régime laminaire afin de pouvoir connaître avec précision la distribution des vitesses, la plage de variation de la vitesse locale de l'écoulement est limitée et l'on doit donc nécessairement limiter assez étroitement la vitesse de chute des billes. Le diamètre de celles-ci étant défini par les considérations précédentes, nous avons été amené à réaliser des billes en Altuglass dont la masse spécifique est de 1,20 gr/cm^3. Ce matériau présente en outre l'avantage d'être remarquablement homogène.

Ce choix d'une seule et unique masse spécifique pour toutes nos expériences peutparaître limiter considérablement le domaine d'application des résultats obtenus. En réalité, il n'en est rien car l'analyse dimensionnelle des résultats montre que le phénomène ne dépend pas explicitement de la masse spécifique mais de la vitesse de chute de la bille. Ce paramètre, qui tient compte implicitement de la masse spécifique, a varié au cours de nos expériences.

II. 3. DEROULEMENT DES EXPERIENCES

II.3.1. PRINCIPE DE LA MESURE

Les premières expériences ont montré qu'une sphère d'un poids spécifique supérieur à celui du fluide, placée dans un écoulement ascendant, occupe en régime uniforme une position stable à l'intérieur de l'écoulement. Cette sphère se trouve alors animée d'un mouvement uniforme soit ascendant soit descendant et peut même être immobilisée dans l'écoulement. Dans ces conditions, la résultante des forces qui s'exercent sur cette sphère est nulle et les forces hydrodynamiques équilibrent exactement les forces dues à la pesanteur.



Avec les définitions que nous avons données de la force de trainée et de la force de portance, et en désignant par α l'angle d'inclinaison du tube sur la verticale et par P le poids déjaugé de la particule, nous avons :

$$F_T = P \cos \alpha$$

$$F_p = P \sin \alpha$$

avec $$P = 4/3 \ \pi \ a^3 \ (\rho_s - \rho) \ g$$

Il est donc ainsi possible de déterminer la force de trainée et la force de portance en laissant la bille libre de tous ses mouvements.

II.3.2. DEROULEMENT DES EXPERIENCES

Pour une bille dont les caractéristiques ont été préalablement déterminées, une expérience se déroule de la façon suivante :

- Le tube expérimental est mis en position verticale, $\alpha = 0°$.
- La bille est introduite dans l'écoulement et lachée sans lui communiquer aucune impulsion.
- Le débit est alors réglé dans le tube de sorte que la bille vienne s'immobiliser à l'intérieur du champ expérimental. On note la valeur du débit Q.
- On prend alors un cliché de la bille et on mesure sa vitesse de rotation par observation directe du mouvement d'un repère tracé sur la bille.
- Enfin, on note la température du fluide pendant l'expérience.

Nous faisons ensuite varier le débit autour de la valeur Q notée précédemment. La bille est alors animée d'un mouvement uniforme ascendant ou descendant et nous enregistrons sur un même cliché quelques positions successives de la particule au moyen du

système de stroboscopie.

Pour cette même bille, nous recommençons le processus pour des valeurs de l'angle α croissantes jusqu'à ce que la bille vienne contre la paroi.

II.3.3. DEPOUILLEMENT D'UN CLICHE

La figure 13 donne un exemple de cliché. Nous travaillons soit directement sur la photo, soit sur une projection à plus grande échelle et nous mesurons directement :

y = distance du centre de la bille à la paroi

d'où $r = R - y$ R étant le rayon du tube.

La vitesse absolue de la bille $\vec{V}_B$ est déterminée en mesurant sur les clichés la distance qui sépare deux positions successives de la bille. Connaissant l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre deux éclairs consécutifs, on en déduit la vitesse $\vec{V}_B$.

Si nous désignons par $\vec{u}$ la vitesse locale du fluide, la vitesse relative de la bille par rapport au fluide, c'est-à-dire par un rapport à un système d'axes qui serait animé de la vitesse $\vec{u}$, est :

$$\vec{V}_r = \vec{V}_B - \vec{u}$$

ou encore en remarquant que $\vec{u}$ est toujours dirigé vers le haut et que $\vec{V}_r$ est toujours dirigé vers le bas :

$$V_r = u \pm V_B$$

le signe + correspondant à un mouvement absolu vers le bas, le signe - correspondant à un mouvement absolu vers le haut.

La vitesse locale u est déterminée par la relation :

$$u = 2\,U\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{2\,Q}{\pi\,R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Le tableau 14 résume l'ensemble des expériences effectuées. Nous n'avons pas jugé utile d'alourdir ce travail en donnant in extenso la totalité des résultats obtenus.

La figure 15 donne, à titre d'exemple, l'ensemble des résultats obtenus pour une des billes.

N°bille \ α	0° Q l/s	0° V(rel) cm/s	3° Q l/s	3° V(rel) cm/s	6° Q l/s	6° V(rel) cm/s	9° Q l/s	9° V(rel) cm/s	12° Q l/s	12° V(rel) cm/s
Bille n° 1	0,249	9,96	0,437	10,60	0,587	10,74	0,702		= 0,720	9,89
P = 119,8mg	0,231	10,00	0,404	10,52	0,555	10,61	0,656	10,36	0,808	10,51
2a= 5,75 mm	0,316	10,13	0,465	10,17	0,636	10,79	0,811	10,34	0,744	10,03
	0,210	10,02	0,327	10,75	0,461	10,49	0,509	10,26		
	0,367	10,50	0,532	11,02	0,694	10,75	0,820	10,43		
Bille n° 2	0,228	9,08	0,400	9,45	0,532	9,64	0,669	10,12	0,789	9,80
P = 107 mg	0,195	9,15	0,380	9,64	0,501	9,55			0,752	
2a= 5,53 mm	0,271	9,35	0,441	8,26	0,597	10,52	0,700	9,87	0,855	9,89
	0,168	9,11	0,358	9,49	0,518	10,75	0,637	9,64	0,745	9,21
	0,283	9,37	0,449	9,96	0,599	9,76	0,634	9,80		
Bille n° 3	0,255	10,16	0,420	10,52	0,570	11,03	0,680	11,01	0,807	10,92
P = 146,1mg	0,244	10,21	0,400	10,61			0,580	11,16	0,759	10,75
2a= 6,15 mm	0,297	10,29	0,508	10,87	0,624	10,97	0,748	11,44	0,867	11,16
	0,212	10,16	0,380	10,81	0,468	10,84			0,770	10,79
	0,302	10,33	0,486	11,15	0,638	10,89	0,749	11,48		
Bille n° 4	0,313	12,46	0,500	12,82	0,614	11,42	0,708	10,82	0,832	10,92
P = 145,1mg	0,280	12,60	0,415	12,29	0,549	10,87	0,703	11,38	0,801	11,02
2a= 6,13 mm	0,424	12,85	0,552	12,70	0,678	11,68	0,761	11,11	0,897	11,18
	0,194	12,90	0,415	12,57	0,494	11,44	0,639	11,19	0,809	10,87
	0,391	12,54	0,601	12,12	0,670	11,54	0,794	10,35		
Bille n° 5	0,317	12,62	0,445	11,45	0,618	11,63	0,733	11,37	0,816	10,69
P = 166,6mg	0,197	9,47	0,418	11,68	0,580	11,90	0,680	11,04	0,758	10,73
2a= 6,42 mm	0,326	10,80	0,514	11,62	0,683	11,73	0,796	11,13	0,939	10,09
	0,179	10,14	0,368	11,36	0,523	12,18	0,584	11,02	0,785	10,70
	0,427		0,568	11,36	0,719	11,75	0,764	9,88		
Bille n° 6	0,281	11,19	0,454	11,67	0,596	11,66	0,694	11,46	0,732	10,49
P = 174,8mg	0,253		0,410	11,98	0,581	10,97	0,650	11,20	0,708	10,74
2a==6,52 mm	0,333		0,519	11,77	0,663	11,73	0,797	11,47	0,790	10,48
	0,238	11,54	0,372	11;52	0,513	11,62	0,567	11,31	0,589	10,64
	0,406	11,31	0,523	11,37	0,663	11,50	0,779	11,44		
Bille n° 7	0,251	9,99	0,440	10,27	0,607	11,71	0,698	11,87	0,744	10,93
P = 190,4mg	0,232	10,87	0,409	10,88	0,549	11,99	0,653	11,33	0,734	11,08
2a= 6,71 mm	0,343	10,69	0,523	11,40	0,649	11,66	0,748	10,92	0,889	10,58
	0,242	10,86	0,374	11,37	0,549	11,56	0,557	11,58	0,502	12,43
	0,330	11,04	0,504	11,54	0,708	12,03	0,783	11,24		

Fig.14 - TABLEAU RECAPITULATIF

α / N° bille	0° Q l/s	0° V(rel) cm/s	3° Q l/s	3° (V(rel) cm/s	6° Q l/s	6° V(rel) cm/s	9° Q l/s	9° V(rel) cm/s	12° Q l/s	12° V(rel) cm/s
Bille n° 8 P = 136,4mg 2a= 6,04 mm	0,210 0,139 0,299 0,193 0,415	8,36 7,57 8,31 8,30 8,85	0,342 0,327 0,410 0,248 0,548	8,72 8,71 8,28 8,43 8,80	0,438 0,408 0,630 0,310 0,680	8,55 8,47 7,97 8,30 7,80	0,551 0,528 0,597 0,687 0,644	 8,24 8,30 7,92 7,44	0,624 0,706 0,807 0,945	9,77 7,44 6,43 8,28
Bille n° 9- P = 176,9mg 2a= 6,54 mm	0,321 0,265 0,419 0,155 0,696	12,78 12,52 13,27 11,54 12,47	0,474 0,518 0,412 0,729 0,343	11,69 11,59 11,51 11,68 11,71	0,616 0,592 0,659 0,362 0,872	12,01 11,23 11,41 11,81 12,05	0,725 0,667 0,811 0,913 0,840	11,26 11,52 11,35 11,56 11,74	0,806 0,931 1,016	10,87 9,74 10,32
Bille n° 10 P = 166,5mg 2a= 6,42 mm	0,324 0,269 0,275 0,223 0,635	11,80 11,98 11,78 11,92	0,426 0,458 0,578 0,371 0,717	11,99 11,44 12,60 11,98 11,66	0,618 0,604 0,398 0,716 0,828	 11,04 12,37 10,86 11,92	0,723 0,679 0,933 0,449 0,780	11,22 11,60 9,69 10,87 12,08	0,822 0,794 0,904	11,78 11,36 12,03
Bille n° 11 P = 153,4mg 2a= 6,24 mm	0,295 0,241 0,365 0,179 0,571	11,74 11,03 11,18 11,01	0,458 0,431 0,563 0,588	 11,43 11,32 11,47	0,588 0,577 0,647 0,353 0,734	11,47 11,57 10,81 10,32 10,96	0,675 0,659 0,826 0,609 0,893	10,77 10,77 10,81 9,80 11,55	0,809 0,777 0,870	10,63 10,55 11,13
Bille n° 12 P = 183,3mg 2a= 6,72 mm	0,251 0,414 0,174 0,351 0,466	11,89 12,02 11,59 11,43 11,14	0,462 0,466 0,529 0,324 0,612	11,81 11,14 10,92 11,46 11,01	0,584 0,566 0,659 0,421	11,39 11,72 11,38 11,26	0,698 0,642 0,806 0,866	11,39 14,21 10,72 10,51	0,796 0,749 0,893 0,950	10,45 10,62 12,26 9,42
Bille n° 13 P = 222,6mg 2a= 7,06 mm	0,312 0,276 0,436 0,193 0,639	12,42 12,49 12,95 12,35 11,84	0,467 0,432 0,557 0,269 0,675	 11,92 11,92 14,15 12,29	0,675 0,597 0,556 0,727 0,474	12,29 11,88 12,15 11,79 12,06	0,700 0,776 0,773 0,564 0,885	11,42 11,24 13,31 11,44 10,28	0,798 0,764 0,893 0,969	12,07 11,64 12,54 11,88
Bille n° 14 P = 227,8mg 2a= 7,12 mm	0,337 0,403 0,380 0,286 0,261	13,42 13,77 12,57 12,43 12,51	0,473 0,461 0,689 0,390	11,29 11,02 11,65 12,04	0,639 0,621 0,687 0,458 0,816	11,70 11,37 12,97 12,27 12,64	0,739 0,674 0,779 0,866	12,06 11,34 11,56 11,89	0,837 0,823 0,909 0,992	11,33 11,90 12,48 12,85
Bille n° 15 P = 273 mg 2a= 7,58 mm	0,364 0,452 0,289 0,694 0,257	14,50 14,87 13,53 16,32 13,94	0,521 0,511 0,597 0,344 0,679	13,07 13,09 13,59 12,22 13,12	0,653 0,632 0,741 0,519 0,758	13,26 13,25 13,95 13,37	0,714 0,806 0,556 0,882 0,837	 11,42 13,28 12,35 12,99	0,837 0,802 0,904 0,565 1,020	12,99 12,50 13,30 15,96 14,90

N° Photo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	6
Δt sec / Δh cm	174,2 / 20	217 / 20	150,7 / 20	253,5 / 20	89 / 20	116,2 / 20	123,5 / 20	97,8 / 20	152,5 / 20	78;8 / 20	128,3 / 20	91,4 / 20
°C / μ	20,6 / 28,35	20,6 / 28,35	20,8 / 28,10	20,8 / 28,10	21 / 27,8	21,3 / 27,4	21,4 / 27,3	21,4 / 27,3	21,5 / 27,15	21,6 / 27,05	21,6 / 27,05	20,1 / 29,1
Nb tour / sec						9 / 23,7	10 / 31,7	5 / 13,7	3 / 11,8	3 / 7,1	5 / 16,7	10 / 19
N / ω= 2ΠN						0,330 / 2,07	0,315 / 1,98	0,365 / 2,29	0,254 / 1,59	0,422 / 2,65	0,299 / 1,88	0,526 / 3,30
Q l/sec	0,324	0,260	0,375	0,223	0,635	0,486	0,458	0,578	0,371	0,717	0,440	0,618
U cm/sec	6,45	5,17	7,46	4,44	12,64	9,67	9,12	11,50	7,38	14,27	8,76	12,30
y mm / r mm	40 / 0	40 / 0	40 / 0	40 / 0	40 / 0	15,33 / 24,67	14 / 26		11,33 / 28,67	18 / 22	14 / 26	
u cm/sec	12,90	10,34	14,92	8,88	25,28	11,99	10,58		7,23	19,98	10,16	
Vitesse propre de la bille	0	1,64	3,14	3,04		0	0,86		5,37	8,00	1,50	
Vitesse relative de la bille	12,90	11,98	11,78	11,92		11,99	11,44		12,60	11,98	11,66	

Fig.15 - TABLEAU DE MESURES

N° Photo	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
α	6	6	6	6	9	9	9	9	9	12	12	12
Δt sec / Δh cm	93,5 / 20	141,9 / 20	78,9 / 20	68,3 / 20	78,2 / 20	83,3 / 20	60,6 / 20	125,8 / 20	72,5 / 20	68,8 / 20	71,2 / 20	62,5 / 20
°C / μ	20,1 / 29,1	20,2 / 28,9	20,2 / 28,9	20,2 / 28,9	20,3 / 28,8	20,3 / 28,8	20,4 / 28,65	20,4 / 28,65	20,4 / 28,65	20,5 / 28,5	20,5 / 28,5	20,6 / 28,35
Nb tour / sec	10 / 19,5	3 / 8,5	10 / 17,6	5 / 9,1	10 / 15	10 / 15	8 / 10,7	10 / 11	10 / 14,2	10 / 11	10 / 11,4	10 / 10,9
N / $\omega = 2\pi N$	0,513 / 3,22	0,353 / 2,22	0,568 / 3,57	0,549 / 3,45	0,667 / 4,19	0,667 / 4,19	0,748 / 4,70	0,909 / 5,71	0,704 / 4,42	0,909 / 5,71	0,877 / 5,51	0,917 / 5,76
$Q_{l/sec}$	0,604	0,398	0,716	0,828	0,723	0,679	0,933	0,449	0,780	0,822	0,794	0,904
$U_{cm/sec}$	12,02	7;92	14,25	16,48	14,39	13,52	18,57	8,94	15,53	16,36	15,80	17,99
y mm / r mm	10 / 30	8 / 32	10,33 / 29,67	13,66 / 26,34	8,66 / 31,34	8,66 / 31,34	10,33 / 29,67	6,67 / 33,33	10 / 30	8 / 32	7,33 / 32,65	8,66 / 31,34
$u_{cm/sec}$	10,58	5,70	12,83	18,79	11,22	10,55	16,71	5,54	13,67	11,78	10,43	14,03
Vitesse propre de la bille	0,46	6,67	2,97	6,87	0	1,05	7,02	5,33	1,59	0	0,93	2,00
Vitesse relative de la bille	11,04	12,37	9,86	11,92	11,22	11,60	9,69	10,87	12,08	11,78	11,36	12,03

CONSTANTES : poids de la bille : 166,5 mg
rayon de la bille : a = 3,21 mm

$\rho_s = 1,20$ $\rho_s - \rho = 0,348$

CHAPITRE III

INTERPRETATION DES RESULTATS

III. 1. ANALYSE DIMENSIONNELLE DU PROBLEME

Le but de notre travail est essentiellement de déterminer la force de trainée F_T , la force de portance F_p, et plus accessoirement la vitesse de rotation Ω d'une particule sphérique , de masse spécifique ρ_s , placée dans un écoulement et animée d'une vitesse relative V_r par rapport au fluide.

Notre objectif est d'établir une relation définissant, par exemple :

$$F_T = f\ (a,\ \rho_s,\ \rho\ ,\ \mu\ ,\ R\ ,\ Q,\ V_r) \qquad (83)$$

En fait, nos expériences nous ont permis de déterminer y, V_r, Ω , en fonction de a, ρ_s, ρ , μ , R, Q et α et g .

Il convient donc d'étudier en détail de quelle façon on peut passer des résultats obtenus aux relations telles que (83). Considérons par exemple la distance du centre de la bille à la paroi :

$$y = f(a, \rho_s, \rho, \mu, Q, R, \alpha, g) \quad (84)$$

le symbole unique f désigne des fonctions différentes.

L'écoulement étant en charge, on sait que l'accélération de la pesanteur n'intervient pas explicitement dans les variables indépendantes. L'expression (84) a donc un terme de trop.

La pesanteur a pour effet de provoquer le mouvement relatif de la bille. Or, on sait que ce mouvement relatif est dû à la différence entre les poids spécifiques de la bille et du fluide. Il est donc possible de remplacer dans l'équation (84) les trois variables ρ, ρ_s et g par, par exemple, ρ, $(\rho_s - \rho)\, g$. Il en résulte que :

$$y = f(a, \rho, (\rho_s - \rho)\, g, \mu, Q, R, \alpha) \quad (85)$$

Introduction de la vitesse relative

Lors de chaque expérience, on a mesuré la vitesse absolue de la bille V_B et, par un raisonnement identique au précédent, on peut écrire que :

$$V_B = f\,(a, (\rho_s - \rho)\, g, \rho, \mu, Q, R, \alpha) \qquad (86)$$

Par ailleurs, la vitesse locale de l'écoulement s'écrit :

$$u = \frac{2Q}{\pi R^2} \left\{ 1 - \frac{(R - y)^2}{R^2} \right\} \qquad (87)$$

Il en résulte que la vitesse relative de la bille V_r s'exprime par une relation :

$$V_r = f\,(a, (\rho_s - \rho)g, \rho, \mu, Q, R, \alpha) \qquad (88)$$

d'où l'on tire :

$$(\rho_s - \rho)\, g = f\,(V_r, a, \rho, \mu, Q, R, \alpha) \qquad (89)$$

En portant cette valeur dans la relation (85) il vient :

$$y = f\,(a, V_r, \rho, \mu, Q, R, \alpha) \qquad (90)$$

De la même façon, on montrerait que :

$$\Omega = f\,(a, V_r, \rho, \mu, Q, R, \alpha) \qquad (91)$$

III.1.1. ETUDE DES FORCES HYDRODYNAMIQUES

La sphère étant en mouvement uniforme, on a :

$$F_T = \frac{4}{3} \pi \ a^3 \ (\rho_s - \rho) \ g \cos \alpha \qquad (92)$$

$$F_P = \frac{4}{3} \pi \ a^3 \ (\rho_s - \rho) \ g \sin \alpha \qquad (93)$$

Il existe donc des relations de la forme :

$$\alpha = f \ (F_T \ , a \ , (\rho_s - \rho)g$$

$$\alpha = f \ (F_P \ , a \ , (\rho_s - \rho)g$$

En portant ces valeurs dans l'équation (90), compte tenu de la relation (89), il vient :

$$F_T = f \ (a \ , V_r \ , \rho \ , \ \mu \ , R \ , Q, \ y) \qquad (94)$$

$$F_P = f \ (a \ , V_r \ , \rho \ , \ \mu \ , R \ , Q, \ y) \qquad (95)$$

L'application du théorème de VASCHY-BUCKINGHAM montre qu'il est toujours possible de remplacer les relations précédentes entre huit variables dimensionnelles par des relations entre cinq produits sans dimensions de ces variables.(On vérifie immédiatement que le rang de la matrice dimensionnelle est de 3).

Ceci nous conduirait à une fonction de quatre variables qu'il est impossible de représenter graphiquement.

Il convient donc d'étudier très soigneusement le choix des produits sans dimensions de façon d'une part à regrouper des variables qui ont le plus d'influence sur les forces étudiées et d'autre part à former des produits sans dimensions dont la signification physique permette de prévoir à priori l'influence.

Etude de la force de trainée

Dans le cas d'une bille animée d'une vitesse uniforme V_r , la force de trainée peut s'écrire d'une façon générale sous la forme :

$$F'_T = \frac{1}{2} \rho \pi a^2 V_r^2 C_X$$

dans laquelle le coefficient de trainée C_X est une fonction du nombre de Reynolds $\frac{V_r a}{\nu}$.

On a donc intérêt par analogie avec ce phénomène à former un produit sans dimensions de la forme :

$$\frac{F_T}{\rho \quad a^2 \quad V_r^2 \quad C_X}$$

car en introduisant le coefficient de trainée C_X, on tient compte déjà dans une certaine mesure de l'influence de la viscosité sur la force de trainée. Les autres produits sans dimensions peuvent être par exemple :

$$\frac{y}{a} , \quad \frac{a}{R} , \quad \frac{V_r a}{\nu} , \quad \frac{Q}{R\nu}$$

Il vient donc dans ces conditions

$$\frac{F_T}{\rho\ a^2\ V_r^2\ C_X} = f\left(\frac{y}{a}, \frac{a}{R}, \frac{V_r\ a}{\nu}, \frac{Q}{R\ \nu}\right) \qquad (96)$$

où

$\frac{y}{a}$ représente l'influence de la paroi

$\frac{a}{R}$ l'obstruction relative de la particule dans le tube

$\frac{V_r\ a}{\nu}$ le nombre de Reynolds de l'écoulement autour de la sphère dont l'influence a déjà été prise en compte en introduisant le C_X et qui, par conséquent, doit avoir une influence très faible.

$\frac{Q}{R\ \nu}$ le nombre de Reynolds de l'écoulement dans le tuyau qui définit le régime d'écoulement, régime d'écoulement, qui, dans le cas de nos expériences, est uniquement laminaire.

Remarque

La vitesse locale s'écrit :

$$u = \frac{2\ Q}{\pi\ R^2}\left(1 - \left(\frac{R - y}{R}\right)^2\right)$$

et $$\frac{\partial u}{\partial y} = \text{rot } u = -\frac{4\,Q}{\pi\,R^4}\,(R - y)$$

IL existe donc une relation entre Q, R, y et rot u et l'on est en droit de remplacer dans les équations (94) et (95) Q par rot u ce qui conduit à une relation de la forme :

$$\frac{F_T}{\rho\ a^2\ V_r^2\ C_X} = f\left(\frac{y}{a}, \frac{a}{R}, \frac{V_r\ a}{\nu}, \frac{\text{rot } u\ a}{V_r}\right) \quad (97)$$

dans laquelle le dernier produit est caractéristique de la dissymétrie de l'écoulement autour de la sphère, dissymétrie qui dépend évidemment du régime d'écoulement dans le tube.

Etude de la force de portance

Nous avons déjà souligné que la force de portance était due d'une part à l'existence d'un gradient de vitesse, d'autre part à l'inter-réaction de la paroi. Il est difficile de prévoir à priori laquelle des deux a le plus d'influence. Nous avons mené le calcul de deux façons. DAns le premier cas, nous avons supposé que c'était le gradient de vitesse qui avait l'influence prépondérante et dans le deuxième cas que c'était la réaction des parois.

Cas où le gradient de vitesse est prépondérant

En remplaçant dans la relation (95) Q par rot u il vient :

$$F_p = f\ (a,\ V_r,\ \rho\ ,\ \mu\ ,\ R\ ,\ \text{rot}\ u\ ,\ y\ )$$

Partant du principe que la force de portance doit être une fonction croissante de rot u et de V_r, nous sommes amené à proposer le paramètre sans dimension :

$$\frac{F_p}{\rho\ \ a^3\ \ \text{rot}\ u\ \ V_r}$$

c'est-à-dire une relation de la forme :

$$\frac{F_p}{\rho\ \ a^3\ \ \text{rot}\ u\ \ V_r} = f\ \left(\frac{y}{a},\ \frac{a}{R},\ \frac{V_r\ a}{\nu},\ \frac{\text{rot}\ u\ a}{V_r}\right) \qquad (98)$$

Si le gradient de vitesse est le terme prépondérant, l'influence des parois devrait être négligeable et les termes tels que $\frac{y}{a}$ et $\frac{a}{R}$ ne devraient pas intervenir. Il ne subsisterait donc que $\frac{V_r\ a}{\nu}$ l'influence dunombre de Reynolds autour de la sphère et celle du terme $\frac{\text{rot}\ u\ a}{V_r}$ caractéristique de la dissymétrie de l'écoulement.

Cas où l'influence de la paroi est prépondérante

Dans un tel cas, la force de portance est directement fonction de la vitesse relative de la bille et de la nature de l'écoulement autour de celle-ci. En supposant que comme dans le cas de la force de trainée la nature de l'écoulement autour de la bille peut être définie par le C_χ, on est amené à proposer un produit sans

dimension de la forme :

$$\frac{F_P}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \; C_X}$$

ce qui conduit à une relation de la forme :

$$\frac{F_P}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \; C_X} = f \left(\frac{y}{a}, \frac{a}{R}, \frac{V_r \; a}{\nu}, \frac{\text{rot u a}}{V_r} \right) \quad (99)$$

dans laquelle chacun des termes a déjà été défini. On peut toutefois remarquer que dans ce cas l'influence de $\frac{y}{a}$ ou d'un terme analogue doit être très importante.

Il est bien évident que les relations (98) et (99) sont équivalentes mais qu'il n'est pas possible de définir à priori le domaine d'application de chacune d'elles.

III.1.2. ETUDE DE LA VITESSE DE ROTATION

Nous avons montré plus haut que :

$$y = f (a, V_r, \rho , \mu , Q , R , \alpha) \quad (90)$$

et

$$\Omega = f (a, V_r, \rho , \mu , Q , R , \alpha) \quad (91)$$

soit en remplaçant Q par rot u

$$\Omega = f (a, V_r, \rho , \mu , \text{rot u}, R , y) \quad (100)$$

La relation prpposée par EINSTEIN

$$\Omega = \frac{1}{2} \text{ rot } u$$

suggère le paramètre sans dimension $\frac{\Omega}{\text{rot } u}$ et une relation de la forme :

$$\frac{\Omega}{\text{rot } u} = f\left(\frac{y}{a}, \frac{a}{R}, \frac{V_r\, a}{\nu}, \frac{\text{rot } u\, a}{V_r}\right) \quad (101)$$

Le sens physique de chacun de ces produits a déjà été évoqué plus haut.

III.2. REPRESENTATION DES RESULTATS

La représentation graphique des résultats est basée sur l'utilisation de l'analyse dimensionnelle des paragraphes précédents. Comme il n'était pas possible de représenter graphiquement les résultats sous la forme d'une fonction de plusieurs produits sans dimensions, il a fallu analyser chacun de ces termes afin de prévoir leur influence, et proposer une formulation plus simple.

L'ensemble des résultats obtenus et des calculs effectués est résumé dans les tableaux 16 à 23.

a = 0,277 cm
ρ_s = 1,201

ι	y cm	r cm	$\frac{y}{a}$ cm	rot u	Ω	ν	V_r cm/sec	Re bille	C_X	F_P	A	$\frac{\text{rot ua}}{V_r}$	F_{P1}	F_{P2}	B	C	D	$\frac{\Omega}{\text{rot u}}$	E
	1,45	2,55	5,24	5,08	1,99	.3615	9,45	14,5	3,50	1,613	30,66	0,149	0,956	0,657	20,43	0,0131	0,830	0,392:	0,506
3°	1,40	2,60	5,07	4,92	1,88	.3581	9,64	14,9	3,44		30,23	0,141	0,945	0,668	20,90	0,0132	0,812	0,382	0,496
	1,36	2,64	4,92	4,70	1,75	.3545	9,49	14,9	3,44		28,99	0,137	0,888	0,725	20,25	0,0148	0,812	0,372	0,483
	1,57	2,43	5,67	5,43	2,78	.3535	9,96	15,6	3,33		36,43	0,151	1,077	0,536	21,60	0,0101	0,784	0,390	0,512
	1,045	2,95	3,79	7,81	3,09	.3523	9,64	15,1	3,42	3,222	21,01	0,224	1,499	1,723	20,78	0,0308	0,812	0,396	0,516
	0,97	3,03	3,51	7,55	2,99	.3500	9,55	15,5	3,35		18,91	0,219	1,436	1,787	20,15	0,0332	0,843	0,396	0,519
	1,12	2,88	4,05	8,55	3,43	.3477	10,52	16,8	3,17		25,51	0,225	1,791	1,431	22,93	0,0232	0,737	0,401	0,536
6°	0,99	3,01	3,59	7,74	2,95	.3466	10,75	17,2	3,12		22,11	0,199	1,657	1,565	23,57	0,0255	0,715	0,381	0,512
	1,10	2,90	3,98	8,64	3,36	.3454	9,76	15,6	3,33		23,26	0,245	1,679	1,543	20,74	0,0270	0,812	0,389	0,510
	0,85	3,15	3,07	10,48	4,36	.3443	10,12	16,3	3,24	4,821	16,84	0,287	2,112	2,709	21,69	0,0432	0,771	0,416	0,552
	0,877	3,123	3,17	10,89	4,49	.3420	9,79	15,9	3,29		17,18	0,308	2,123	2,698	20,61	0,0441	0,812	0,412	0,543
	0,679	3,21	2,86	10,20	4,10	.3420	9,66	15,6	3,33		14,49	0,292	1,961	2,860	20,31	0,0484	0,825	0,402	0,527
	0,788	3,212	2,85	10,12	4,03	.3397	9,80	16,0	3,28		14,74	0,286	1,975	2,847	20,59	0,0477	0,814	0,398	0,525
	0,48	3,52	1,73	7,90		.3674	9,66	11,5	4,10		4,23	0,286	1,205	3,627	15,72	0,0795	1,066		
	0,58	3,42	2,09	7,42		.3697	8,42	12,6	3,85		6,90	0,274	1,244	3,577	17,84	0,0705	0,940		
9°	0,57	3,43	2,06	7,15		.3709	8,37	12,5	3,90		6,61	0,237	1,191	3,630	17,86	0,0744	0,939		
	0,48	3,52	1,73	5,57		.3709	8,16	12,2	3,95		4,47	0,189	0,905	3,916	17,20	0,0887	0,975		
	0,475	3,525	1,71	5,12		.3709	8,15	12,2	3,95		4,35	0,174	0,832	3,989	17,17	0,0919	0,975		
	0,45	3,55	1,62	4,70		.3709	7,95	11,9	4,02		3,71	0,164	0,744	4,077	16,59	0,0987	1,010		
	0,425	3,575	1,53	4,25		.3709	8,01	12,0	4,00		3,20	0,147	0,678	4,143	16,79	0,1013	0,997		
	0,390	3,61	1,41	3,90		.3709	7,90	11,8	4,05		2,41	0,137	0,614	4,207	16,52	0,1059	1,015		
	0,375	3,625	1,35	3,61		.3709	4,73	7,1	5,45		1,25	0,212	0,340	4,481	17,95	0,2131	2,106		
	0,375	3,626	1,35	3,77		.3703	7,79	11,7	4,05		2,06	0,134	0,585	4,236	16,06	0,1101	1,042		
	0,375	3,625	1,35	3,57		.3697	7,81	11,7	4,05		2,07	0,127	0,556	4,265	16,15	0,1111	1,038		
	0,277	3,723	1,00	3,50		.3703	4,31	6,4	5,9		0	0,225	0,300	4;521	7,16	0,2348	2,341		
	0,68	3,32	2,46	13,03	5,98	.3385	9,80	16,1	3,26	6,408	11,67	0,368	2,542	3,866	20,47	0,0595	0,812	0,459	0,607
12°	0,745	3,255	2,69	13,86	6,10	.3385	9,89	16,2	3,25		13,67	0,391	2,729	3,679	20,78	0,0543	0,798	0,440	0,583
	0,610	3,39	2,20	12,57	5,66	.3376	9,21	15,1	3,41		9,08	0,378	2,304	4,104	18,91	0,0675	0,877	0,450	0,586
										0,807			0,653	0,154					
1°5	2,63	1,37	9,49	3,28		.3700							0,752	0,055					
	2,73	1,27	9,86	3,78		.3660													

$a = 0{,}2875$ cm

$\rho_s = 1{,}204$

α	y cm	r cm	$\frac{y}{a}$	rot u	u_a	v_a	V_r cm/sec	Re bille	C_X	F_P	A	$\frac{\text{rot ua}}{V_r}$	F_{P1}	F_{P2}	B	C	D	$\frac{\Omega}{\text{rot u}}$	E
	1,50	2,50	5,217	5,44	2,06	0,3275	10,60	18,61	2,93	1,786	39,24	0,148	1,284	0,502	23,18	0,0086	0,807	0,379	0,520
	1,46	2,54	5,08	5,11	1,89	0,3275	10,52	18,47	2,97		37,66	0,140	1,197	0,589	23,15	0,0102	0,808	0,370	0,507
3°	1,50	2,50	5,22	5,78	2,13	0,3263	10,17	17,92	3,05		37,79	0,163	1,320	0,477	22,18	0,0084	0,844	0,369	0,501
	1,23	2,77	4,28	4,51	1,77	0,3230	10,75	19,14	2,92		31,37	0,121	1,080	0,706	23,76	0,0123	0,788	0,392	0,542
	1,69	2,31	5,88	6,12	2,21	0,322	11,02	19,68	2,85		48,00	0,160	1,502	0,284	24,37	0,0045	0,768	0,361	0,503
	1,06	2,94	3,69	8,59	3,25	0,3170	10,74	19,48	2,87	3,607	26,17	0,230	2,055	1,552	23,31	0,0241	0,800	0,378	0,525
	0,995	3,005	3,46	8,30	3,12	0,3170	10,61	19,25	2,90		23,68	0,225	1,961	1,646	22,99	0,0260	0,811	0,376	0,521
6°	1,106	2,894	3,85	9,16	3,43	0,3150	10,79	19,70	2,86		28,04	0,244	2,201	1,406	23,45	0,0213	0,796	0,374	0,521
	0,899	3,101	3,13	7,11	2,82	0,3150	10,49	19,15	2,92		20,36	0,195	1,661	1,946	21,85	0,0314	0,824	0,397	0,549
	1,161	2,834	4,04	9,80	3,67	0,3130	10,75	19,75	2,845		30,00	0,262	2,346	1,261	23,15	0,0190	0,805	0,374	0,522
	0,80	3,20	2,78	10,45	4,21	0,3220	10,36	18,50	2,97	5,359	16,49	0,290	2,411	2,948	22,45	0,0442	0,825	0,403	0,552
9°	0,96	3,04	3,34	12,57	4,69	0,3200	10,34	18,58	2,96		21,73	0,341	2,826	2,533	22,29	0,0362	0,831	0,382	0,524
	0,69	3,31	2,40	8,38	3,67	0,3200	10,26	18,44	2,98		12,91	0,235	1,915	3,444	22,09	0,0561	0,838	0,438	0,600
	0,70	3,30	2,43	13,47	5,98	0,3190	10,43	18,80	2,94	7,146	13,49	0,371	3,129	4,017	22,52	0,0547	0,813	0,444	0,611
	0,592	3,408	2,06	12,21	5,76	0,3170	9,89	17,94	3,03		9,50	0,355	2,689	4,457	20,87	0,0670	0,878	0,472	0,641
12°	0,744	3,256	2,59	14,06	5,98	0,3160	10,51	19,12	2,92		15,18	0,385	3,291	3,855	22,71	0,0515	0,807	0,425	0,588
	0,612	3,388	2,13	18,54	5,51	0,3150	10,03	18,31	3,00		10,33	0,531	4,141	3,005	21,25	0,0336	0,862	0,297	0,406

$a = 0{,}3065$ cm
$\rho_s = 1{,}203$

α	y cm	r cm	$\frac{y}{a}$	rot u	Ω	ν	V_r cm/sec	Re bille	C_X	F_P	A	$\frac{\text{rot ua}}{V_r}$	F_{P1}	F_{P2}	B	C	D	$\frac{\Omega}{\text{rot u}}$	E
	1,61	2,39	5,25	4,72	1,80	.3961	10,17	15,7	3,32	2,154	33,47	0,142	1,295	0,859	27,48	0,0120	0,813	0,381	0,501
	1,55	2,45	5,06	4,44	1,66	.3949	10,32	16,0	3,28		32,50	0,132	1,236	0,918	27,96	0,0130	0,804	0,374	0,494
	1,69	2,31	5,51	5,32	1,93	.3915	10,32	16,2	3,25		36,47	0,158	1,482	0,672	27,70	0,0091	0,804	0,363	0,481
3°	1,50	2,50	4,89	4,47	1,66	.3961	10,51	16,2	3,25		31,67	0,139	1,267	0,887	28,73	0,0122	0,779	0,371	0,491
	1,76	2,24	5,74	5,48	2,05	.3915	10,45	16,3	3,24		38,80	0,161	1,545	0,608	28,32	0,0079	0,788	0,374	0,496
	1,59	2,41	5,19	4,73	1,73	.3915	10,63	16,6	3,19		34,85	0,136	1,356	0,798	28,95	0,0109	0,779	0,366	0,488
	1,72	2,28	5,61	5,38	1,96	.3892	10,46	16,5	3,21		37,99	0,158	1,519	0,635	28,11	0,0087	0,796	0,364	0,484
	1,62	2,38	5,28	4,75	1,83	.3880	10,32	16,6	3,19		34,94	0,141	1,323	0,831	27,19	0,0120	0,821	0,387	0,513
	1,35	2,65	4,40	6,19	2,36	.4318	10,48	14,9	3,44	3,229	25,33	0,181	1,750	1,479	30,24	0,0181	0,737	0,381	0,495
	1,21	2,79	3,95	5,53	2,13	.4272	10,04	14,4	3,51		21,23	0,169	1,498	0,731	28,32	0,0229	0,788	0,385	0,496
	1,41	2,59	4,60	6,63	2,48	.4237	10,11	14,6	3,49		26,33	0,201	0,808	0,421	28,55	0,0181	0,779	0,374	0,483
4°5	1,21	2,79	3,95	5,45	2,09	.4214	10,08	14,7	3,47		21,61	0,166	0,482	0,746	28,22	0,0229	0,788	0,383	0,496
	1,41	2,59	4,60	6,55	2,48	.4191	10,18	14,9	3,44		26,80	0,197	0,800	0,429	28,53	0,0181	0,779	0,379	0,492
	1,21	2,79	3,95	5,48	2,11	.4191	10,09	14,8	3,45		21,75	0,166	0,493	0,737	28,11	0,0234	0,796	0,385	0,499
	1,49	2,51	4,86	6,83	2,62	.4168	10,14	14,9	3,44		28,79	0,206	0,869	0,360	28,31	0,0182	0,788	0,384	0,498
	1,35	2,65	4,40	6,14	2,40	.4237	10,40	15,0	3,42		25,61	0,181	0,724	0,505	29,61	0,0234	0,754	0,391	0,508
	1,13	2,87	3,69	7,57	2,99	.4214	10,23	14,9	3,44	4,302	19,99	0,227	2,090	2,212	28,81	0,0172	0,771	0,395	0,513
	1,03	2,97	3,36	6,33	2,45	.4100	10,69	16,0	3,28		18,96	0,181	1,826	2,476	30,00	0,0189	0,745	0,387	0,511
	1,21	2,79	3,95	8,18	3,09	.4041	10,82	16,4	3,23		24,19	0,232	2,388	1,914	30,27	0,0270	0,737	0,378	0,502
6°	1,05	2,95	3,43	7,12	2,74	.4038	10,26	15,6	3,33		18,89	0,213	1,971	2,331	28,06	0,0308	0,793	0,385	0,505
	1,21	2,79	3,95	8,01	3,11	.4001	10,33	15,8	3,30		23,33	0,238	2,233	2,069	28,18	0,0220	0,788	0,388	0,511
	1,00	3,00	3,26	6,98	2,54	.4001	10,41	15,9	3,29		18,04	0,206	1,961	2,341	28,59	0,0296	0,779	0,364	0,480
	1,31	2,69	4,27	8,54		.3995	10,51	16,2	3,25		26,40	0,249	2,422	1,880	28,73	0,0253	0,779		
	1,08	2,92	3,65	7,63	2,95	.3984	10,07	15,5	3,35		19,55	0,232	2,073	2,228	27,19	0,0295	0,821	0,387	0,507

a = 0,3065 cm
ρ_s = 1,203 (Suite)

x	y cm	r' cm	$\frac{y}{a}$	rot u	Ω	ν	V_r cm/sec	Re bille	C_X	F_P	A	$\frac{\text{rot ua}}{V_r}$	F_{P1}	F_{P2}	B	C	D	$\frac{\Omega}{\text{rot u}}$	E
	0,90	3,10	2,90	9,21	4,05	.4237	9,96	14,4	3,51	6,438	13,95	0,283	2,475	3,963	27,87	0,0467	0,796	0,440	0,567
	0,97	3,03	3,16	10,18	4,10	.4214	9,98	14,4	3,51		15,71	0,313	2,741	3,697	27,98	0,0420	0,798	0,403	0,519
9°	0,86	3,14	2,81	8,85	3,67	.4203	9,95	14,5	3,50		13,10	0,273	2,376	4,062	27,73	0,0486	0,796	0,415	0,535
	0,85	3,15	2,77	9,00	3,61	.4168	9,98	14,7	3,47		13,01	0,276	2,423	4,015	27,66	0,0481	0,804	0,401	0,519
	0,99	3,01	3,23	10,07	4,16	.4145	10,25	15,2	3,39		16,90	0,301	2,785	3,653	28,51	0,0412	0,779	0,413	0,539
	0,91	3,09	2,97	9,54	4,05	.4134	9,96	14,8	3,45		14,54	0,293	2,564	3,874	27,39	0,0458	0,804	0,425	0,551
	0,69	3,31	2,32	12,32	5,28	.4100	9,79	14,5	3,50	8,556	9,16	0,386	3,255	5,301	26,85	0,0578	0,813	0,429	0,553
	0,81	3,19	2,64	13,04	5,61	.4053	9,94	15,0	3,42		12,35	0,402	3,498	5,058	27,05	0,0539	0,813	0,430	0,559
	0,69	3,31	2,25	11,47	5,32	.4030	10,03	15,3	3,38		9,54	0,351	3,104	5,452	27,22	0,0610	0,804	0,464	0,606
12°	0,79	3,21	2,58	12,67	5,61	.4007	10,02	15,4	3,36		12,09	0,388	3,425	5,131	27,00	0,0556	0,813	0,443	0,579
	0,73	3,27	2,38	12,34	5,41	.4007	10,02	15,4	3,36		10,59	0,377	3,336	5,201	27,00	0,0572	0,813	0,438	0,573
	2,11	1,89	6,89	2,99	1,65	.4237	9,86	14,2	3,55	1,077	41,97	0,093	0,795	0,283	27,62	0,0041	0,813	0,552	0,709
	2,09	1,91	6,81	2,71	0,97	.4122	10,13	15,0	3,42		43,83	0,082	0,740	0,337	28,09	0,0050	0,796	0,358	0,465
1°5	2,11	1,89	6,89	2,83	1,02	.4064	10,26	15,5	3,35		45,53	0,085	0,783	0,294	28,23	0,0041	0,796	0,360	0,472
	2,30	1,70	7,52	3,14	1,12	.4030	10,40	15,8	3,30		51,57	0,093	0,881	0,196	28,57	0,0028	0,779	0,357	0,470
	2,10	1,90	6,79	2,74	1,01	.4018	10,04	15,3	3,38		44,82	0,084	0,742	0,334	27,27	0,0050	0,821	0,369	0,482
	2,42	1,58	7,90	3,66	1,31	.3999	10,59	16,2	3,25		56,02	0,106	1,046	0,031	29,17	0,0004	0,771	0,358	0,474
	2,19	1,86	7,14	2,99	1,06	.3984	10,53	16,2	3,25		49,78	0,087	0,849	0,228	28,84	0,0033	0,779	0,355	0,470

$a = 0{,}3073$ cm

$\rho_s = 1{,}203$

α	y cm	r cm	$\frac{y}{a}$	rot u	Ω	ν	V_r cm/sec	Re billes	C_X	F_P	A	$\frac{\text{rot ua}}{V_r}$	F_{P1}	F_{P2}	B	C	D	$\frac{\Omega}{\text{rot u}}$	E
	1,565	2,435	5,09	5,09	1,91	0,373	10,52	17,33	3,10	2,175	35,47	0,149	1,456	0,719	27,60	0,0100	0,817	0,375	0,505
3°	1,517	2,483	4,94	4,94	1,86	0,370	10,01	16,63	3,18		32,73	0,152	1,345	0,830	25,64	0,0124	0,879	0,377	0,502
	1,711	2,289	5,57	5,79	2,09	0,367	10,87	18,20	3,00		41,58	0,164	1,712	0,463	28,52	0,0061	0,790	0,361	0,492
	1,494	2,506	4,86	4,74	1,77	0,367	10,81	18,10	3,01		34,95	0,135	1,394	0,781	28,30	0,0108	0,796	0,373	0,508
	1,663	2,337	5,41	5,65	2,03	0,363	11,15	18,88	2,93		41,64	0,156	1,713	0,462	29,31	0,0060	0,769	0,359	0,495
	1,133	2,857	3,69	8,13	3,09	0,362	11,03	18,73	2,96	4,393	25,16	0,227	2,439	1,954	28,97	0,0236	0,775	0,380	0,522
	1,196	2,804	3,89	8,71	3,25	0,359	10,97	18,78	2,95		27,16	0,244	2,599	1,795	28,56	0,0216	0,786	0,374	0,514
6°	1,003	2,997	3,26	6,98	2,58	0,359	10,84	18,56	2,98		21,01	0,198	2,058	2,335	28,17	0,0301	0,796	0,370	0,507
	1,196	2,804	3,89	8,90	3,31	0,357	10,99	18,92	2,93		27,36	0,232	2,660	1,733	28,47	0,0212	0,789	0,372	0,513
	0,904	3,096	2,94	10,63	4,10	0,354	11,01	19,12	2,92	6,526	18,56	0,297	3,183	3,343	28,48	0,0378	0,783	0,386	0,534
	0,630	3,170	2,70	9,15	3,69	0,354	11,16	19,38	2,89		16,48	0,252	2,777	3,749	28,96	0,0439	0,770	0,403	0,559
9°	0,994	3,006	3,23	11,19	4,33	0,353	11,44	19,92	2,84		22,25	0,301	3,482	3,044	29,90	0,0328	0,745	0,387	0,541
	1,002	2,998	9,26	11,17	4,33	0,350	11,48	20,16	2,83		22,79	0,299	3,488	3,038	30,01	0,0326	0,741	0,388	0,544
	0,750	3,250	2,44	13,05	5,51	0,349	10,92	19,29	2,90	8,702	13,85	0,367	3,876	4,826	27,82	0,0517	0,794	0,422	0,585
	0,715	3,285	2,33	12,41	5,28	0,349	10,76	18,95	2,93		12,57	0,354	3,632	5,070	27,29	0,0564	0,810	0,425	0,586
12°	0,818	3,182	2,66	13,73	5,56	0,347	11,16	19,77	2,85		16,42	0,378	4,167	4,535	28,56	0,0470	0,772	0,405	0,565
	0,721	3,279	2,35	12,56	5,23	0,347	10,79	19,11	2,92		12,86	0,358	3,686	5,016	27,35	0,0553	0,806	0,416	0,575

$a = 0{,}309$ cm

$\rho_s = 1{,}20$

α	y cm	r cm	$\frac{y}{a}$	rot u	Ω	ν	V_r cm/sec	Re bille	C_X	F_P	A	$\frac{\text{rotua}}{V_r}$	F_{P1}	F_{P2}	B	C	D	$\frac{\Omega}{\text{rot u}}$	E
	0,540	3,460	1,748	6,08	2,76	.2899	10,78	22,88	2,58	6,578	8,6	0,174	1,812	4,766	24,39	0,0727	0,920	0,454	0,663
	0,530	3,470	1,715	4,56	2,30	.2899	10,80	23,02	2,57		8,2	0,130	1,362	5,216	24,39	0,0842	0,920	0,504	0,736
	0,490	3,510	1,586	3,88	1,74	.2899	11,35	24,20	2,50		7,1	0,106	1,212	5,360	26,06	0,0826	0,856	0,448	0,665
	0,470	3,530	1,521	2,86	1,79	.2899	10,54	22,47	2,62		5,9	0,084	0,834	5,744	23,68	0,1014	0,948	0,626	0,937
	0,309	3,691	1,000	1,86		.2887	11,90	25,47	2,42		0	0,048	0,612	5,966	27,88	0,0936	0,805		
9°	0,460	3,540	1,489	1,85	1,43	.2887	10,71	22,93	2,59		5,6	0,053	0,548	6,030	24,17	0,1082	0,928	0,773	1,127
	0,309	3,691	1,000	2,30		.2887	5,94	12,72	3,84		0	0,120	0,378	6,200	11,02	0,0969	2,036		
	0,480	3,520	1,553	3,22	2,03	.2876	10,45	22,46	2,62		6,2	0,095	0,930	5,648	23,28	0,1000	0,964	0,630	0,913
	0,450	3,550	1,456	2,84	1,65	.2876	11,16	23,98	2,52		5,5	0,079	0,876	5,702	25,53	0,0937	0,878	0,581	0,860
	0,309	3,691	1,000	2,74		.2876	6,18	13,28	3,72		0	0,137	0,468	6,110	11,56	0,2064	1,941		
	0,460	3,540	1,483	2,62	1,85	.2870	10,38	22,35	2,63		5,5	0,078	0,752	5,826	23,05	0,1064	0,973	0,706	1,022
	0,440	3,560	1,424	0,50	1,05	.2870	14,74	31,74	2,10		6,7	0,010	0,204	6,374	37,12	0,0782	0,605	2,100	0,343

$a = 0{,}321$ cm

$\rho_s = 1{,}201$

α	y cm	r cm	$\frac{y}{a}$	rot u	Ω	ν	V_r cm/sec	Re bille	C_X	F_P	A	$\frac{\text{rot ua}}{V_r}$	F_{P1}	F_{P2}	B	C	D	$\frac{\Omega}{\text{rot u}}$	E
	1,557	2,443	4,85	5,41	1,94	0,354	11,11	20,1	2,82	2,519	38,97	0,156	1,864	0,854	30,56	0,0104	0,834	0,359	0,503
	1,531	2,469	4,77	5,15	1,82	0,352	11,39	20,8	2,75		39,15	0,145	1,819	0,700	31,32	0,0083	0,812	0,353	0,500
3°	1,694	2,306	5,28	5,90	2,07	0,350	11,62	21,3	2,72		45,58	0,163	2,126	0,393	40,43	0,0036	0,790	0,392	0,559
	1,426	2,574	4,44	4,71	1,70	0,349	11,36				35,97	0,133							
	1,786	2,214	5,56	6,26	2,18	0,347	11,36	20,9	2,74		47,96	0,177	2,205	0,313	31,05	0,0036	0,821	0,348	0,493
	1,096	2,904	3,41	8,93	3,14	0,340	11,63	22,0	2,65	5,031	26,51	0,246	3,023	2,008	31,47	0,0201	0,804	0,352	0,507
	1,094	2,906	3,41	8,38	2,99	0,340	11,90	22,5	2,62		57,06	0,226	3,551	1,480	32,58	0,0154	0,778	0,357	0,518
6°	1,169	2,831	3,64	9,62	3,31	0,338	11,73	22,3	2,63		29,43	0,263	2,751	2,280	31,77	0,0236	0,798	0,344	0,497
	0,997	2,903	3,11	7,56	2,77	0,338	12,18	23,1	2,57		24,36	0,199	3,721	1,220	33,48	0,0127	0,758	0,366	0,535
	1,248	2,752	3,89	9,85	3,43	0,336	11,75	22,5	2,62		32,42	0,269					0,796	0,348	0,505
	0,896	3,104	2,79	11,32	4,19	0,336	11,61	22,2	2,64	7,528	19,87	0,313	4,077	3,451	31,24	0,0341	0,808	0,370	0,534
	0,855	3,145	2,66	10,64	3,90	0,335	11,33	21,7	2,67		18,06	0,301	3,739	3,785	30,09	0,0396	0,836	0,367	0,526
9°	0,987	3,013	3,07	11,94	4,33	0,334	11,44	22,0	2,65		22,81	0,335	4,237	3,291	30,45	0,0327	0,827	0,363	0,523
	0,786	3,214	2,45	9,34	3,57	0,331	11,43	22,2	2,64		16,06	0,262	3,311	4,217	30,28	0,0457	0,833	0,382	0,552
	0,837	3,163	2,61	12,02	4,16	0,331	10,25				15,98	0,376						0,346	
	0,757	3,243	2,36	13,16	5,37	0,330	11,13	21,7	2,67	10,010	14,70	0,380	4,543	5,467	29,04	0,0542	0,858	0,408	0,585
	0,705	3,295	2,20	12,42	5,23	0,330	11,17	21,7	2,67		13,00	0,357	4,303	5,707	29,25	0,0556	0,852	0,421	0,604
12°	0,887	3,113	2,76	14,54	5,61	0,329	10,54	20,6	2,78		18,13	0,443	4,754	5,256	27,12	0,0523	0,921	0,386	0,545
	0,727	3,273	2,26	12,79	5,28	0,326	11,22	22,1	2,65		13,97	0,366	4,452	5,558	29,29	0,0556	0,852	0,413	0,596

$a = 0{,}326$ cm

$\rho_s = 1{,}205$

α	y cm	r cm	$\frac{y}{a}$	rot u	ω	ν	V_r cm/sec	Re bille	C_X	F_P	A	$\frac{\text{rot ua}}{V_r}$	F_{P1}	F_{P2}	B	C	D	$\frac{\Omega}{\text{rot u}}$	E
	1,62	2,38	4,97	5,38	1,91	0,360	11,67	21,14	2,73	2,612	41,95	0,150	2,038	0,574		0,0063	0,794	0,354	0,504
	1,55	2,498	4,76	4,99	1,78	0,359	11,98	21,76	2,67		40,91	0,136	1,941	0,671		0,0073	0,771	0,357	0,512
3°	1,74	2,260	5,34	5,84	2,03	0,357	11,77	21,50	2,70		46,62	0,162	2,232	0,380		0,0041	0,790	0,348	0,498
	1,477	2,523	4,53	4,67	1,65	0,357	11,52	21,04	2,64		37,14	0,132	1,747	0,865		0,0103	0,844	0,353	0,502
	1,71	2,29	5,25	5,96	2,07	0,357	11,37	20,77	2,75		44,08	0,171	2,200	0,412		0,0046	0,831	0,347	0,491
	1,148	2,852	3,52	8,46	3,02	0,362	11,66	21,00	2,74	5,274	26,48	0,237	3,203	2,071		0,0206	0,790	0,357	0,507
	1,100	2,900	3,37	8,38	2,84	0,359	12,42	22,56	2,62		26,78	0,220	3,379	1,895		0,0177	0,728	0,339	0,492
6°	1,240	2,760	3,80	9,11	3,19	0,359	11,73	21,30	2,72		29,86	0,253	3,469	1,805		0,0175	0,788	0,350	0,498
	1,038	2,962	3,18	7,56	2,75	0,359	11,62	21,10	2,73		23,05	0,212	2,852	2,422		0,0250	0,498	0,364	0,518
	1,240	2,760	3,80	9,11	3,31	0,357	11,50	21,00	2,74		29,44	0,258	3,401	1,873		0,0187	0,812	0,363	0,515
	0,940	3,06	2,88	10,57	4,13	0,357	11,46	20,93	2,74	7,836	19,71	0,301	3,934	3,902		0,0374	0,812	0,391	0,555
	0,891	3,109	2,73	10,06	3,83	0,357	11,20	20,45	2,78		17,73	0,293	3,659	4,177		0,0415	0,838	0,381	0,537
9°	1,050	2,950	3,22	11,70	4,30	0,356	11,47	21,01	2,74		23,33	0,333	4,357	3,479		0,0322	0,810	0,368	0,533
	0,820	3,180	2,52	8,97	3,63	0,354	11,33	20,83	2,75		15,78	0,259	3,294	4,542		0,0467	0,830	0,405	0,574
	1,000	3,000	3,07	11,63	4,30	0,354	11,44	21,07	2,74		21,78	0,331	4,320	3,516		0,0325	0,815	0,370	0,526
	0,800	3,200	2,45	11,66	5,15	0,354	10,49	19,32	2,90	10,448	14,05	0,362	3,971	6,477		0,0653	0,906	0,442	0,613
	0,690	3,21	2,42	11,31	4,87	0,353	10,74	19,85	2,84		14,12	0,343	3,945	6,503		0,0652	0,833	0,431	0,602
12°	0,880	3,120	2,70	12,27	5,28	0,353	10,48	19,36	2,90		16,45	0,382	3,957	6,491		0,0642	0,908	0,430	0,596
	0,690	3,310	2,12	9,70	4,63	0,353	10,64	19,65	2,86		10,97	0,297	3,362	7,096		0,0758	0,893	0,476	0,663

a = 0,336 cm

ρ_s = 1,202

α	y cm	r cm	$\frac{y}{a}$	rot u	Ω	ν	V_r cm/sec	Re bille	C_X	F_P	A	$\frac{\text{rot ua}}{V_r}$	F_{P1}	F_{P2}	B	C	D	$\frac{\Omega}{\text{rot u}}$	E
	1,49	2,510	4,44	5,90	1,96	.3322	11,42	23,09	2,58	2,884	39,67	0,174	2,394	0,490	32,365	0,0053	0,894	0,332	0,485
3°	1,45	2,55	4,32	5,58	1,87	.3310	11,62	23,57	2,52		39,11	0,161	2,303	0,581	32,729	0,0063	0,882	0,335	0,493
	1,75	2,25	5,21	6,30	2,11	.3304	12,46	25,32	2,43		53,32	0,170	2,788	0,096	36,288	0,0009	0,795	0,335	0,505
	1,71	2,29	5,09	6,18	2,04	.3298	12,55	25,55	2,41		52,29	0,165	2,756	0,128	36,511	0,0012	0,790	0,330	0,499
	1,128	2,872	3,36	9,33	3,16	.3263	12,61	25,95	2,38	5,760	30,61	0,248	4,180	1,580	36,402	0,0140	0,790	0,339	0,515
	1,08	2,92	3,22	8,58	2,91	.3263	12,75	26,24	2,37		29,07	0,226	3,886	1,874	37,058	0,0170	0,775	0,339	0,517
6°	1,200	2,800	3,57	9,72	3,29	.3228	12,65	26,31	2,36		33,86	0,258	4,368	1,392	36,325	0,0122	0,793	0,338	0,516
	1,08	2,92	3,22	8,58	2,98	.3239	12,34	25,58	2,41		28,35	0,234	3,762	1,998	35,999	0,0187	0,815	0,347	0,525
	1,25	2,75	3,72	10,42	3,39	.3234	13,17	27,34	2,31		37,22	0,266	4,876	0,884	38,539	0,0073	0,745	0,325	0,503
	0,950	3,050	2,83	11,39	3,97	.3210	12,51	26,17	2,37	8,619	23,93	0,306	5,062	3,557	35,676	0,0304	0,800	0,349	0,532
	0,900	3,10	2,68	10,83	3,85	.3198	12,11	25,42	2,42		21,96	0,300	4,660	3,959	34,137	0,0356	0,835	0,349	0,535
	0,95	3,05	2,83	12,20	4,13	.3187	11,86	24,98	2,45		22,85	0,346	5,140	3,479	33,148	0,0306	0,863	0,339	0,508
	0,83	3,17	2,47	9,45	3,49	.3169	12,20	25,85	2,39		19,02	0,260	4,096	4,523	34,216	0,0424	0,835	0,369	0,560
	1,02	2,98	3,04	12,49	4,30	.3157	12,28	26,72	2,37		26,61	0,342	5,449	3,170	34,337	0,0269	0,832	0,344	0,524
	0,743	3,257	2,21	7,69		.3697	10,84	19,70	2,85		11,93	0,238	2,961	5,658	32,212	0,0579	0,888		
	0,680	3,320	2,03	6,61		.3697	10,75	19,50	2,86		10,00	0,206	2,524	6,094	31,791	0,0656	0,899		
9°	0,592	3,408	1,76	5,07		.3697	10,25	18,60	2,96		7,10	0,166	1,846	6,773	29,913	0,0810	0,956		
	0,590	3,410	1,76	4,60		.3697	10,55	19,20	2,90		7,25	0,145	1,725	6,894	31,047	0,0816	0,921		
	0,550	3,450	1,64	4,05		.3697	10,61	19,30	2,89		6,14	0,128	1,527	7,092	31,293	0,0852	0,913		
	0,540	3,460	1,61	3,55		.3697	10,46	19,00	2,92		5,77	0,114	1,319	7,300	30,730	0,0908	0,929		
	0,530	3,470	1,58	2,68		.3697	10,33	18,80	2,94		5,42	0,087	0,983	7,636	30,176	0,0999	0,945		
	0,490	3,510	1,46	2,20		.3697	10,35	18,80	2,94		4,31	0,071	0,808	7,810	30,293	0,1039	0,943		
	0,450	3,550	1,34	0,55		.3697	10,26	18,60	2,96		3,16	0,018	0,200	8,419	29,971	0,1213	0,953		
	0,445	3,555	1,33	0,28		.3697	9,83	17,90	3,03		2,90	0,010	0,098	8,521	28,162	0,1317	1,013		
	0,450	3,550	1,34	0,55		.3697	9,66	17,60	3,07		2,98	0,019	0,189	8,430	27,556	0,1319	1,035		
	0,787	3,213	2,34	13,31	4,98	.3087	11,75	25,56	2,41	11,456	17,17	0,380	5,556	5,900	32,004	0,0518	0,884	0,374	0,565
12°	0,755	3,245	2,25	12,74	4,95	.3099	11,83	25,63	2,40		15,99	0,362	5,355	6,101	32,307	0,0542	0,874	0,389	0,588
	0,906	3,094	2,70	14,71	5,28	.3087	11,66	25,36	2,43		21,53	0,424	6,09	5,362	31,778	0,0454	0,958	0,359	0,541
	0,635	3,365	1,89	9,04	4,01	.3087	12,87	27,99	2,28		12,47	0,236	4,134	7,322	36,325	0,0667	0,777	0,443	0,691

Dans tous les tableaux précédents, nous avons noté :

$$A = \frac{V_r\,(y - a)}{\nu}$$

$$B = \rho\, a^2\, V_r^2\, C_X$$

$$C = \frac{F_{P2}}{\rho\, a^2\, V_r^2\, C_X} \left(\frac{1}{1 + \frac{6a}{R} + \frac{\text{rot } u\, a}{V_r}}\right)^2$$

$$D = \frac{F_T}{C_X} \left(1 - \frac{2a}{R}\right)$$

$$E = \frac{\Omega}{\text{rot } u} \left(1 + \frac{Re}{50}\right)$$

III.2.1. FORCE DE TRAINEE

Nous avons montré que la force de trainée pouvait être définie à partir d'une équation :

$$\frac{F_T}{\rho\ a^2\ V_r^2\ C_X} = f\left(\frac{y}{a}, \frac{a}{R}, \frac{V_r\ a}{\nu}, \frac{\text{rot u a}}{V_r}\right) \quad (97)$$

Dans cette relation :

F_T est la force de trainée mesurée égale dans nos expériences à : $\frac{4}{3}\ \pi\ a^3\ (\rho_s - \rho)\ g \cos\alpha$

V_r est la vitesse relative mesurée de la bille, cette vitesse peu différente de la vitesse de chute.

C_X est le coefficient de trainée qu'aurait la sphère se déplaçant à la vitesse V_r dans un milieu infini. C'est une fonction du nombre de Reynolds autour de la sphère qui tient donc compte de l'influence de la viscosité. La variation de C_X en fonction du nombre de Reynolds est donnée par la courbe expérimentale de la figure 24.

Etude de l'influence du terme $\frac{a}{R}$

De nombreuses études expérimentales (Ref.27) ont montré que la vitesse de chute d'une sphère dans un milieu confiné est plus faible que dans un milieu infini. On peut tenir compte de

cet effet en introduisant un terme correctif dans l'expression du coefficient de trainée.

Diverses formules ont été proposées ; certaines n'introduisent qu'une correction en $\frac{a}{R}$ (FAXEN - LADENBURG - WAKIYA) ; d'autres introduisent une correction fonction à la fois de $\frac{a}{R}$ et du nombre de Reynolds (FAXEN - Mc NOWN). Citons par exemple les trois formules suivantes :

$$\frac{F_T}{6\,\pi\,\mu\,u\,a} = \frac{1}{1 - 2{,}105\,(\frac{a}{R}) + 2{,}087\,(\frac{a}{R})^3} \qquad (102)$$

$$\frac{F_T}{6\,\pi\,\mu\,u_o\,a} = \frac{1 - \frac{2}{3}\,(\frac{a}{R})^2}{1 - 2{,}105\,(\frac{a}{R}) + 2{,}807\,(\frac{a}{R})^3} \qquad (103)$$

$$\frac{F_T}{6\,\pi\,\mu\,u\,a} = \frac{1}{1 - \frac{3}{16}\,Re_o - \frac{a}{R}\,\{f(Re_o\,\frac{R}{a})\} + 2{,}09\,(\frac{a}{R})^3} \qquad (104)$$

Dans ces formules :

F_T indique la force de trainée sur une sphère dans un milieu fini.

Re_o nombre de Reynolds de la sphère.

Oseen (théorique)
Schiller 1928
Liebster 1924
Allen 1900
Göttingen 1921
Göttingen 1926

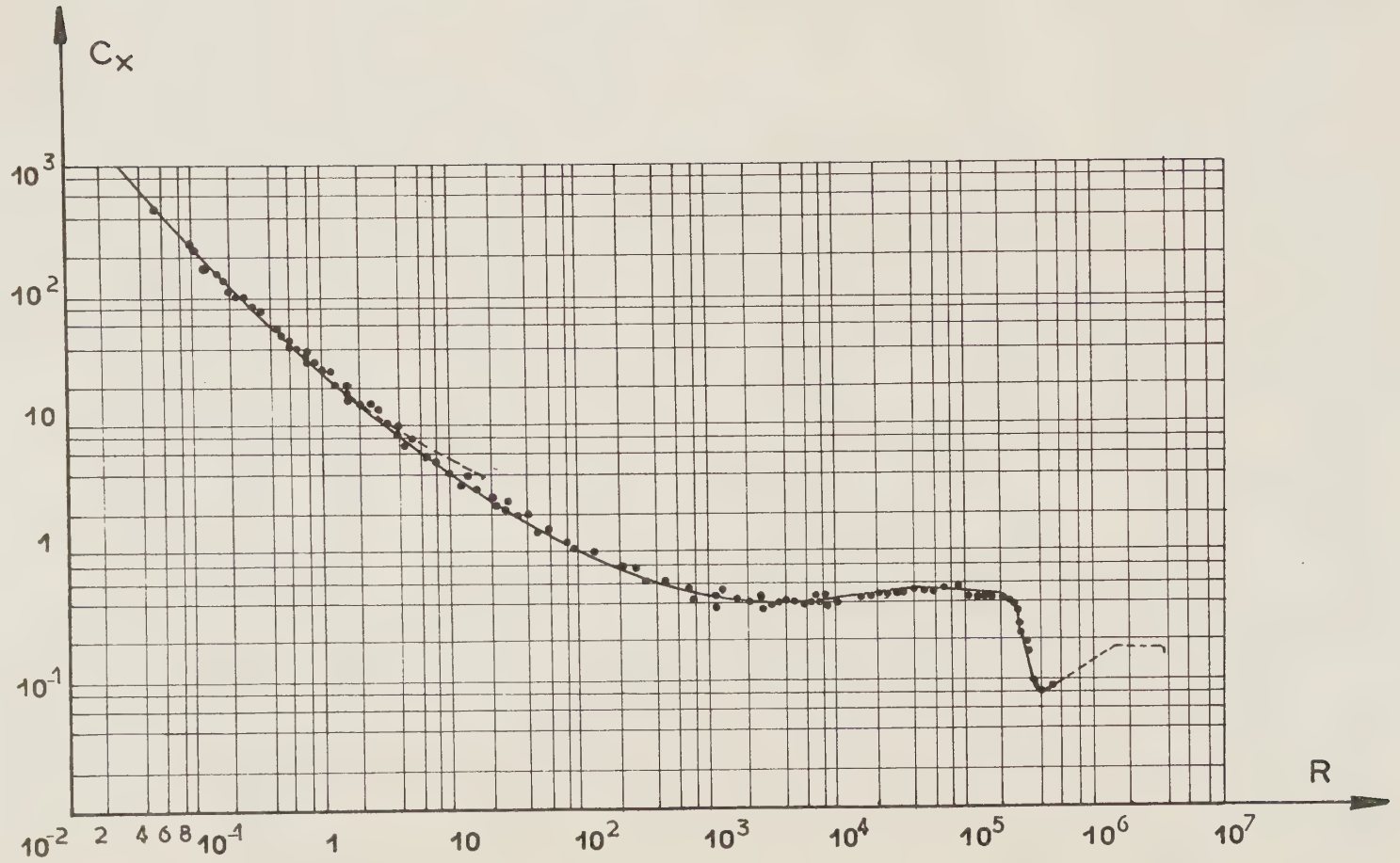


Fig.24 VARIATION DU C_x DE LA SPHERE AVEC LE NOMBRE DE REYNOLDS
(AUX FAIBLES NOMBRES DE MACH)

Physiquement ce phénomène peut s'expliquer de la façon suivante : les forces hydrodynamiques exercées par l'écoulement sur la sphère sont une fonction croissante de la vitesse de l'écoulement au voisinage immédiat de la sphère. Quand le milieu est limité l'écoulement n'a pas la possibilité de s'épanouir autour de l'obstacle et par suite les vitesses et les forces hydrodynamiques sont plus grandes que dans le cas où le milieu est infini.

L'écoulement autour d'une sphère animée d'une vitesse V_r dans un milieu confiné peut donc être comparé à l'écoulement qui se produirait autour d'une sphère animée d'une vitesse V'_r , en milieu infini. Le rapport V'_r / V_r est d'autant plus grand que le milieu est plus limité c'est-à-dire que a/R est plus grand. Les termes correctifs introduits dans les relations telles que (102, 103) peuvent donc être considérés aussi bien comme une correction du C_X que comme une correction de la vitesse relative.

On peut donc tenir compte de l'influence du terme en a/R en écrivant un produit sans dimension de la forme :

$$\frac{F_T}{\rho \; a^2 \quad V'^2_r \quad C_X}$$

dans lequel V'_r représente la vitesse de chute en milieu infini.

Si on néglige l'influence du nombre de Reynolds en identifiant avec la relation (102) on est amené à poser :

$$V'^2_r = V^2_r \left(1 + k \frac{a}{R} \right)$$

En remplaçant V_r' par sa valeur et en faisant un développement limité, on voit que le paramètre

$$\frac{F_T}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \; C_X} \left(1 - k \; \frac{a}{R} \right)$$

tient compte de l'influence de $\frac{a}{R}$.

Par analogie avec les résultats cités en référence nous avons adopté pour k la valeur 2.

Etude de l'influence du terme $\frac{V_r \; a}{\nu}$

Ce terme caractérise la nature de l'écoulement autour de la sphère ; or, au terme correctif près, la nature de l'écoulement autour de la sphère est définie par le coefficient de trainée C_X qui est lui-même une fonction de $\frac{V_r \; a}{\nu}$. Le fait d'avoir introduit ce coefficient de trainée permet donc de tenir compte implicitement du paramètre $\frac{V_r \; a}{\nu}$ et le produit

$$\frac{F_T}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \; C_X} \left(1 - \frac{2a}{R} \right)$$

ne doit pas être fonction de $\frac{V_r \; a}{\nu}$.

Etude de l'influence du terme $\frac{\text{rot u a}}{V_r}$

Ce terme caractérise la dissymétrie de l'écoulement. En régime laminaire, nous pouvons supposer que cette dissymétrie n'a que très peu d'influence sur la force de trainée. On peut donc penser que le produit

$$\frac{F_T}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \; C_X} \left(1 - \frac{2a}{R}\right)$$

doit être indépendant de $\frac{\text{rot u a}}{V_r}$.

Sur la figure 25 nous avons représenté les variations de

$$\frac{F_T}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \; C_X} \left(1 - \frac{2a}{R}\right)$$

en fonction de $\frac{y}{a}$.

Les points obtenus se disposent de façon aléatoire autour d'une courbe unique. On ne peut noter aucun classement systématique des points en fonction des paramètres $\frac{a}{R}$, $\frac{V_r \; a}{\nu}$ et $\frac{\text{rot u a}}{V_r}$, ce qui confirme nos hypothèses.

Compte tenu des erreurs expérimentales qui seront analysées dans le chapitre suivant, nous pouvons conclure que :

$$F_T = f\left(\frac{y}{a}\right) \left(\rho \; a^2 \; V_r^2 \; C_X\right) \left(1 - \frac{2a}{R}\right) \quad (105)$$

Le coefficient $f\left(\frac{y}{a}\right)$ étant défini par la courbe de la figure 25.

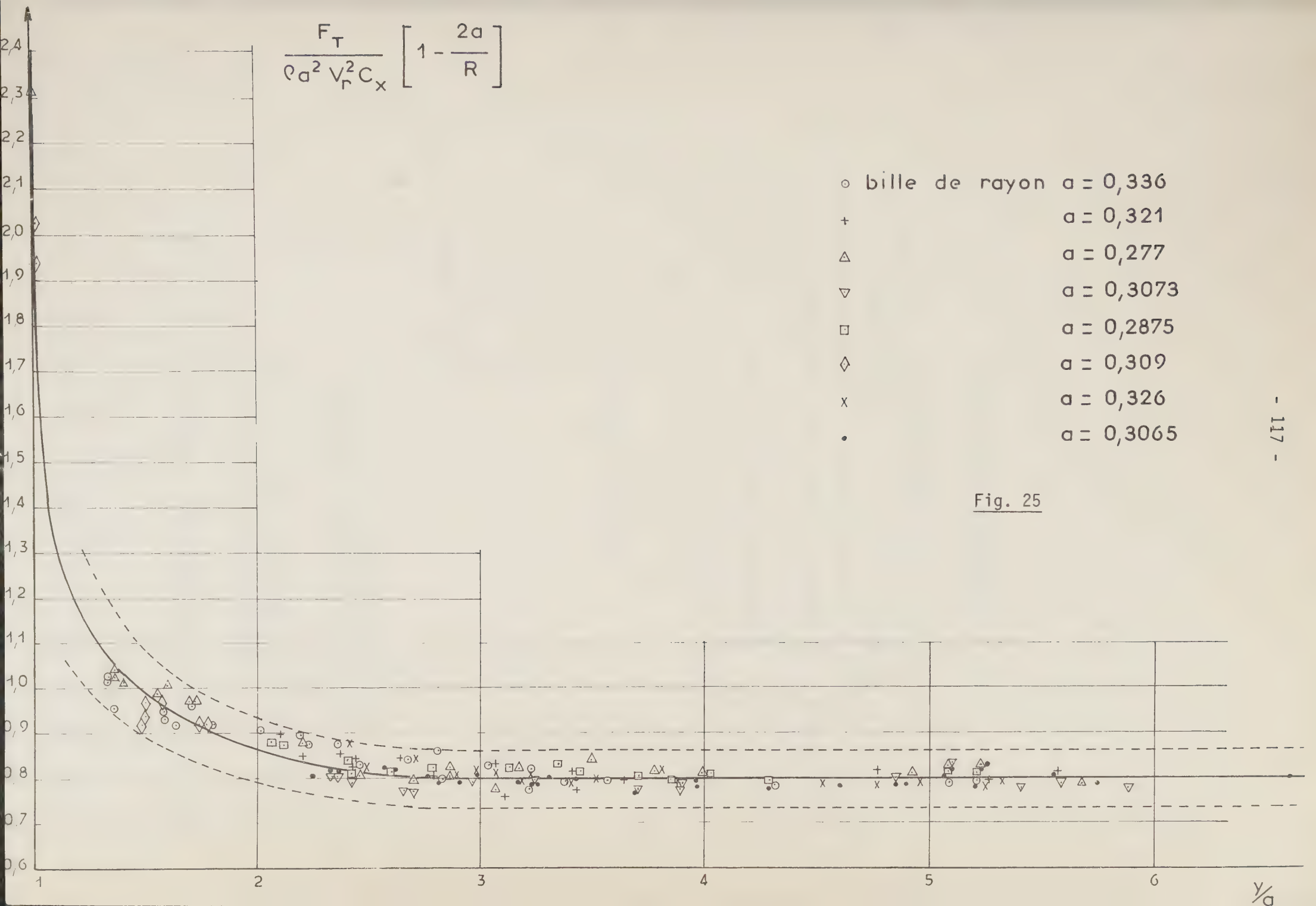

$\frac{F_T}{\rho a^2 V_r^2 C_x}\left[1-\frac{2a}{R}\right]$
2,4
2,3
2,2
2,1
2,0
1,9
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
1
2
3
4
5
6
y/a
○ bille de rayon a = 0,336
+ a = 0,321
△ a = 0,277
▽ a = 0,3073
□ a = 0,2875
◇ a = 0,309
x a = 0,326
• a = 0,3065

Fig. 25

III.2.2. FORCE DE PORTANCE

L'analyse dimensionnelle a montré que l'on pouvait proposer deux formulations différentes suivant que l'on considère que l'effet prépondérant est celui dû au gradient de vitesse ou au contraire celui dû à l'inter-réaction entre la bille et la paroi. Lors de nos expériences, nous avons pu constater que , à débit constant, à une variation de l'angle α c'est-à-dire à une variation de la force de portance correspondait une importante variation de y, donc de $\frac{y}{a}$. Nous avons donc supposé dans une première étape que quelle ^{a}que soit la formulation adoptée le produit $\frac{y}{a}$ jouait un rôle prépondérant.

Nous avons représenté

$$\frac{F_P}{\rho \; a^3 \; \text{rot u} \; V_r} \qquad \text{et} \qquad \frac{F_P}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \; C_X}$$

en fonction de $\frac{y}{a}$

F_P est la force de portance mesurée qui, dans le cas de nos expériences, vaut $\frac{4}{3} \pi \; a^3 (\rho_s - \rho) g \sin \alpha$

V_r et C_X et rot u sont des valeurs mesurées ou calculées pour chaque expérience.

Les résultats sont donnés par les figures 26 et 27.

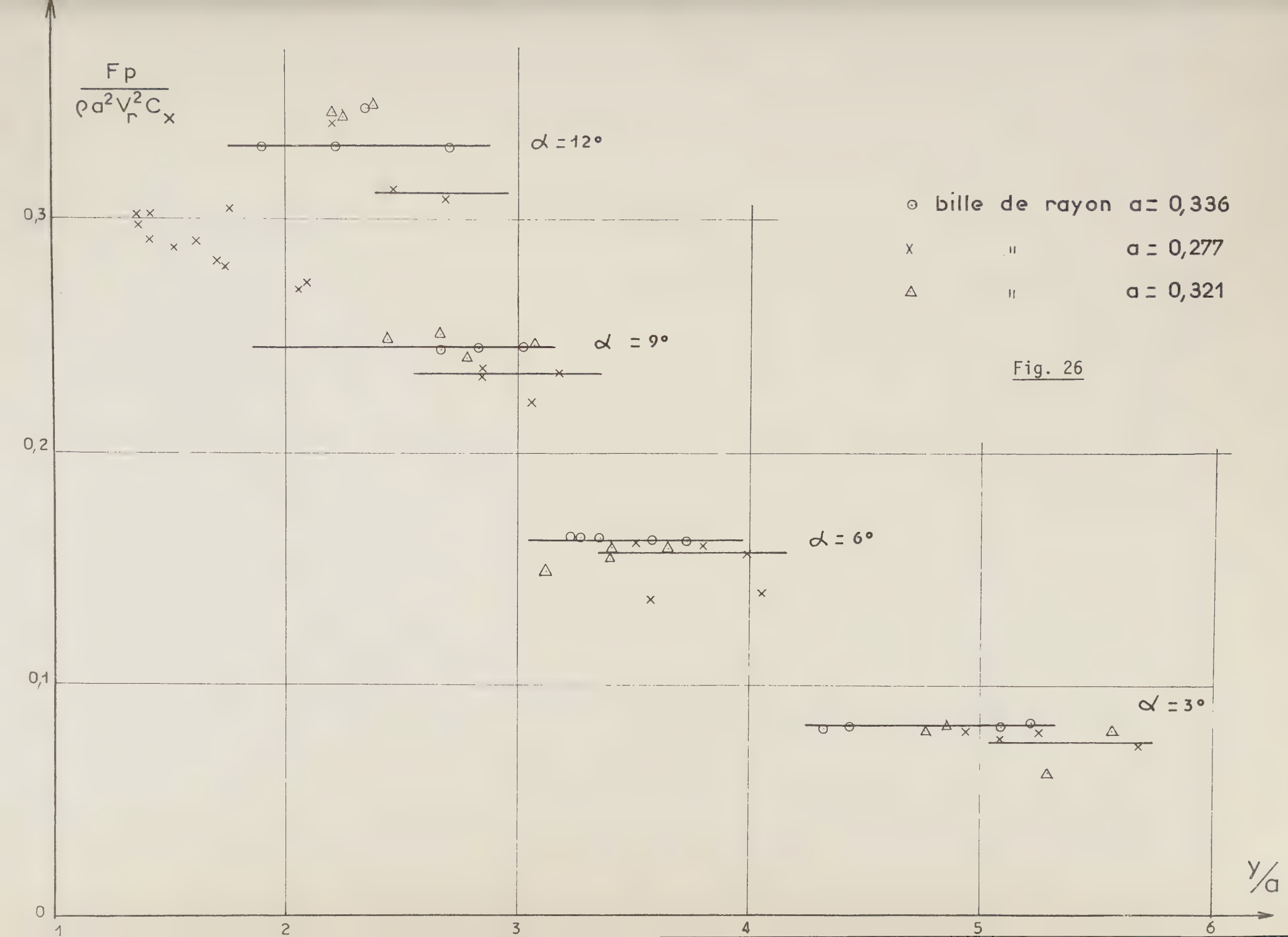

$\frac{Fp}{\rho a^2 V_r^2 C_x}$
α = 12°
α = 9°
α = 6°
α = 3°
⊙ bille de rayon a = 0,336
× " a = 0,277
△ " a = 0,321
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
6
y/a

Fig. 26

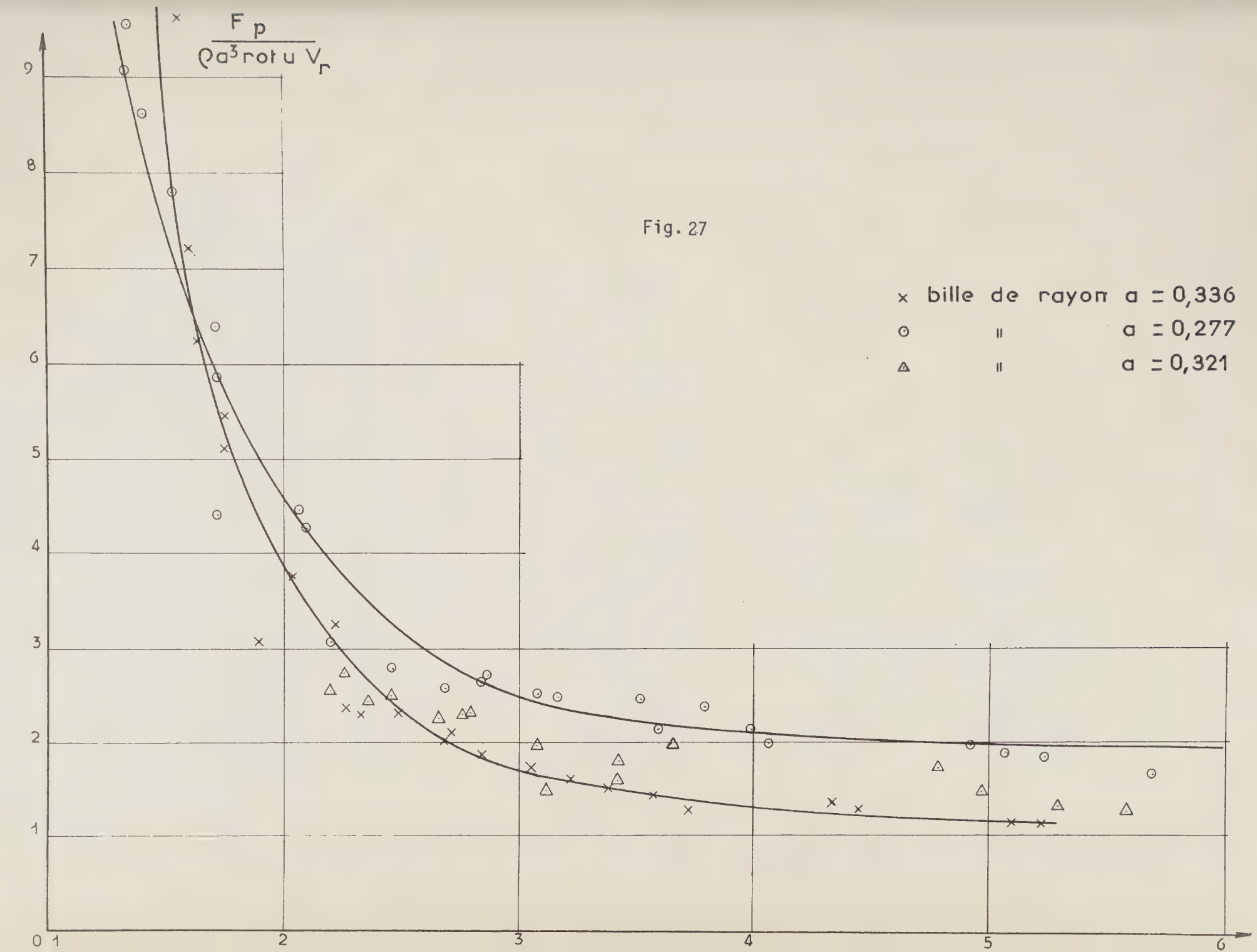

$\frac{F_p}{\rho a^3 \text{rot}\, u\, V_r}$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
y/a
× bille de rayon a = 0,336
⊙ " a = 0,277
△ " a = 0,321

Fig. 27

Pour la clarté de la représentation, nous n'avons porté que les points correspondant aux billes de diamètre 2,77 - 3,21 et 3,36.

Sur la figure 26, on note non seulement un classement des points en fonction de la valeur de l'angle α mais également un classement en fonction de la valeur du diamètre des billes. Le classement des points en fonction de l'angle α traduit l'influence du rotationnel car ainsi qu'on peut le constater sur les tableaux de mesures, le rotationnel croît avec l'angle .

La figure 27 met en évidence l'influence du paramètre $\frac{y}{a}$ pour de faibles valeurs de ce dernier et l'on note un classement des points en fonction du diamètre de la bille. Toutefois, on peut constater que les points expérimentaux tendent pour les grandes valeurs de $\frac{y}{a}$ à se rapprocher d'une asymptote horizontale ce qui prouverait que le rapport :

$$\frac{F_p}{\rho \; a^3 \; \text{rot u} \; V_r}$$

tend, loin de la paroi, vers une valeur constante indépendante des paramètres $\frac{a}{R}$, $\frac{V_r \; a}{\nu}$, et $\frac{\text{rot u} \; a}{V_r}$.

Ces observations montrent que, quel que soit le cas considéré, on ne peut négliger ni l'influence du rotationnel, ni la réaction de la paroi et que la représentation cherchée doit tenir compte de ces deux effets.

L'alignement des points étant meilleur dans la représentation de la figure 27, nous avons dans une deuxième étape essayé d'améliorer cette représentation en introduisant les autres paramètres sans dimension sous forme de termes correctifs.

Malgré de très nombreuses tentatives, il n'a pas été possible de faire coïncider les courbes relatives aux différentes billes dans le domaine des faibles valeurs de $\frac{y}{a}$. Nous en avons déduit que le seul paramètre :

$$\frac{F_P}{\rho \; a^3 \; \text{rot } u \; V_r}$$

ne peut être caractéristique du phénomène que loin de la paroi et que au voisinage de celle-ci il faut tenir compte non seulement de ce paramètre mais également d'un paramètre de la forme :

$$\frac{F_P}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \; C_X}$$

ce qui nous conduit à formuler l'hypothèse suivante :

HYPOTHESE FONDAMENTALE

Quand une sphère se trouve placée dans un écoulement à gradient de vitesse au voisinage d'une paroi, la force totale de portance à laquelle elle se trouve soumise peut être considérée comme la somme de deux forces :

l'une F_{P1} dépendant directement du rotationnel de l'écoulement;

l'autre F_{P2} caractéristique de l'inter-réaction entre la bille et la paroi.

F_{P1} est la force de portance qui existerait si l'inter-réaction entre la bille et la paroi était nulle.

F_{P2} est la force qui existerait si le gradient de vitesse était nul.

La force de portance mesurée est :

$$F_P = F_{P1} + F_{P2} \qquad (106)$$

avec

$$\frac{F_{P1}}{\rho \; a^3 \; \text{rot } u \; V_r} = f\left(\frac{y}{a}, \frac{a}{R}, \frac{V_r \; a}{\nu}, \frac{\text{rot } u \; a}{V_r}\right) \qquad (107)$$

et

$$\frac{F_{P2}}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \; C_X} = f\left(\frac{y}{a}, \frac{a}{R}, \frac{V_r \; a}{\nu}, \frac{\text{rot } u \; a}{V_r}\right) \qquad (108)$$

c'est-à-dire :

$$F_P = k_1 \rho \; a^3 \; \text{rot } u \; V_r + k_2 \rho \; a^2 \; V_r^2 \; C_X \qquad (109)$$

k_1 et k_2 étant fonction des divers produits sans dimension.

La difficulté de cette représentation est qu'il n'est pas possible de mesurer expérimentalement F_{P1} et F_{P2} mais uniquement leur somme.

Etude de F_{P1}

Loin de la paroi, on doit pouvoir négliger l'influence de cette dernière c'est-à-dire que la force de portance se réduit pratiquement à F_{P1} qui doit être indépendant de $\frac{y}{a}$. Par ailleurs, nous avons vu sur la figure 27 que toujours pour les grandes valeurs de $\frac{y}{a}$, le rapport

$$\frac{F_P}{\rho \; a^3 \; \text{rot } u \; V_r}$$

tendait vers une valeur constante indépendante des paramètres $\frac{a}{R}$ $\frac{V_r \; a}{\nu}$ $\frac{\text{rot } u \; a}{V_r}$.

Dans la mesure où l'influence de la paroi ne se fait pas sentir, on peut donc écrire :

$$\frac{F_P}{\rho \; a^3 \; \text{rot } u \; V_r} = K \qquad (110)$$

K étant une constante indépendante de $\frac{y}{a}$ $\frac{a}{R}$ et des nombres de Reynolds.

Avec la définition que nous avons donnée de F_{P1} nous sommes donc amenés à écrire :

$$\frac{F_{P1}}{\rho \; a^3 \; \text{rot } u \; V_r} = k_1 \qquad (111)$$

k_1 étant une constante indépendante de $\frac{y}{a}$ $\frac{a}{R}$ et des nombres de Reynolds.

c'est-à-dire : $$F_{P1} = k_1 \rho \ a^3 \ \text{rot u} \ V_r \qquad (112)$$

Etude de F_{P2}

A partir de la définition que nous avons donnée de F_{P2}, ce terme doit tendre vers 0 au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la paroi et que l'influence de cette dernière devient négligeable. Le rapport :

$$\frac{F_{P2}}{\rho \ a^2 \ V_r^2 \ C_X}$$

est donc fonction de $\frac{y}{a}$. Il doit vraisemblablement être fonction également des paramètres $\frac{a}{R}$ $\frac{V_r \ a}{\nu}$ $\frac{\text{rot u} \ a}{V_r}$.

Nous nous proposons d'étudier maintenant l'influence de ces divers termes sur ce rapport.

Influence de la distance à la paroi

L'effet d'inter-réaction entre la bille et la paroi dépend essentiellement de la nature de l'écoulement entre la bille et la paroi. Or cet écoulement dépend non seulement des caractéristiques géométriques mais également des caractéristiques cinématiques. C'est pourquoi il nous a paru plus logique de définir l'influence de la paroi à partir d'un paramètre caractéristique de la nature de l'écoulement entre la bille et la paroi.

Nous avons choisi le paramètre $\frac{V_r (y - a)}{\nu}$ qui constitue un nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement considéré. C'est en utilisant ce paramètre que nous avons obtenu le meilleur alignement des points.

Influence du terme $\frac{a}{R}$

La force de portance est due à la dissymétrie des vitesses locales au voisinage de la sphère. Compte tenu des remarques faites au paragraphe précédent sur l'influence du terme $\frac{a}{R}$, la valeur absolue des vitesses locales et par suite de la force de portance est d'autant plus grande que le milieu est plus limité. Comme dans le cas de la force de trainée, nous sommes amenés à remplacer la vitesse relative V_r par une vitesse fictive V'_r d'autant plus grande que le terme $\frac{a}{R}$ est plus grand. Nous proposons une relation de la forme :

$$V'_r = V_r \left(1 + \frac{k_3 a}{R}\right)$$

Ce coefficient k n'est pas forcément le même que celui qui a été introduit dans la détermination de la force de trainée.

Influence du nombre de Reynolds $\frac{V_r \, a}{\nu}$

Ce terme caractérise la nature de l'écoulement autour de la sphère. Or nous avons montré au paragraphe précédent que le coefficient de trainée C_X tenait compte implicitement de cette influence.

Influence du terme $\frac{\text{rot u a}}{V_r}$

Conformément aux hypothèses formulées, imaginons une sphère placée dans un écoulement sans gradient de vitesse à une distance y d'une paroi. Si la bille ne tourne pas sur elle-même, la force de portance est fonction de la vitesse relative de la sphère. Si la sphère tourne sur elle-même, la dissymétrie de l'écoulement est augmentée et la force de portance croît . On peut tenir compte de cet effet en écrivant que quand la bille, animée d'une vitesse relative V_r tourne sur elle-même avec une vitesse Ω , tout se passe comme si la bille ne tournait pas sur elle-même mais était animée d'une vitesse V_r'' supérieure à V_r.

Nous nous proposons d'écrire :

$$V_r'' = V_r \left(1 + k'' \frac{\Omega\ a}{V_r}\right)$$

en prenant en première approximation $\Omega = k_2''$ rot u , il vient :

$$V_r'' = V_r \left(1 + k_4 \frac{\text{rot u a}}{V_r}\right)$$

On peut donc tenir compte à la fois de l'influence de $\frac{a}{R}$ et de $\frac{\text{rot u a}}{V_r}$ en introduisant dans les produits sans dimension une vitesse V_r relative corrigée de la forme :

$$V_{rc} = V_r \left(1 + k_3 \frac{a}{R} + k_4 \frac{\text{rot u a}}{V_r}\right) \quad (113)$$

L'influence du terme $\frac{V_r\ a}{\nu}$ étant incluse dans le coefficient de trainée C_X, le produit sans dimension

$$\frac{F_{P2}}{\rho\ a^2\ V_r^2\ C_X}\left(\frac{1}{1 + k_3\frac{a}{R} + k_4\frac{\text{rot u a}}{V_r}}\right)^2$$

ne doit dépendre que de $\frac{y}{a}$.

En résumé, la force de portance totale qu'un écoulement à gradient de vitesse exerce sur une sphère s'écrit :

$$F_P = k_1\ \rho\ a^3\ \text{rot u}\ V_r + k_2\ \rho\ a^2\ V_r^2\ C_X\left(1 + \frac{k_3\ a}{R} + k_4\frac{\text{rot u a}}{V_r}\right)^2 \qquad (114)$$

Les coefficients k_1, k_3, k_4 étant constants, le coefficient k_2 étant une fonction de $V_r(y-a) / \nu$. Les valeurs de ces différents coefficients ont été déterminées expérimentalement.

Détermination des coefficients

Détermination du coefficient k_1

L'ordre de grandeur du coefficient k_1 peut être déterminé de deux façons différentes : soit en appliquant la formule théorique établie au chapitre I qui conduit à adopter pour k_1 la valeur $\pi / 2 = 1{,}57$, soit expérimentalement en remarquant que loin de la paroi la force F_{P2} doit être nulle et que par conséquent F_{P1} est égale à F_P. Il vient dans ces conditions :

$$k_1 = \frac{F_P}{\rho \; a^3 \; \text{rot } u \quad V_r} \qquad \text{pour } \frac{y}{a} \text{ grand}$$

Cette relation nous permet d'établir une limite maximum pour le coefficient k_1 . En effet, quelles que soient les expériences effectuées, on doit toujours avoir :

$$k_1 \; \rho \; a^3 \; \text{rot } u \quad V_r \leqslant F_P$$

Ces remarques nous ont conduit à adopter pour k_1 la valeur 1,1, valeur inférieure à la valeur théorique de 1,57 qui se justifie par le fait que la théorie exposée au chapitre I n'est pas rigoureusement exacte.

Détermination des coefficients k_3 et k_4

Ayant précisé la signification physique de ces termes correctifs, nous avons tenté de calculer théoriquement la valeur des coefficients k_3 et k_4. Les résultats obtenus varient dans de très larges limites suivant les hypothèses que l'on formule sur la nature de l'écoulement autour de la bille, et ne permettent pas de tirer une conclusion nette. Nous nous sommes contentés de déterminer ces coefficients par approximations successives jusqu'à obtenir le meilleur alignement possible des points expérimentaux dans le plan :

$$\frac{F_{P2}}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \; C_X} \left(\frac{1}{1 + k_3 \frac{a}{R} + k_4 \frac{\text{rot } u \; a}{V_r}} \right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{V_r \; (y - a)}{\nu}$$

avec

$$F_{P2} = F_P - 1{,}1 \ \rho \ a^3 \ \text{rot u} \ V_r$$

La figure 28 montre les résultats obtenus pour :

$$k_3 = 6$$

$$k_4 = 1$$

Compte tenu des erreurs expérimentales, l'ensemble des points se rassemble d'une façon aléatoire très satisfaisante autour d'une courbe unique qui définit la variation du coefficient k_2 en fonction de $\frac{V_r\,(y-a)}{\nu}$.

Cette loi de variation du coefficient k_2 peut être représentée par la relation :

$$k_2 = \frac{\frac{V_r\,(y-a)}{\nu} - 74{,}65}{-59{,}55\ \frac{V_r\,(y-a)}{\nu} - 400}$$

La force de portance, dans le domaine de nos expériences, peut donc être définie par la relation :

$$F_P = 1{,}1\ \rho\ a^3\ \text{rot u}\ V_r + k_2\ \rho\ a^2\ V_r^2\ C_X\left(1+\frac{6a}{R}+\frac{\text{rot u}\ a}{V_r}\right)^2 \qquad (115)$$

avec :

$$k_2 = \frac{\frac{V_r\,(y-a)}{\nu} - 74{,}65}{-59{,}55\ \frac{V_r\,(y-a)}{\nu} - 400} \qquad (116)$$

$$\frac{F_2}{\rho a^2 V_r^2 C_x} \left[\frac{1}{\left[1+\frac{6a}{R}+\frac{\text{rot } u a}{V_r}\right]}\right]^2$$

× bille de rayon a = 0,336
▽ a = 0,321
△ a = 0,277
\+ a = 0,3073
◊ a = 0,2875
□ a = 0,309
⊙ a = 0,326
• a = 0,3065

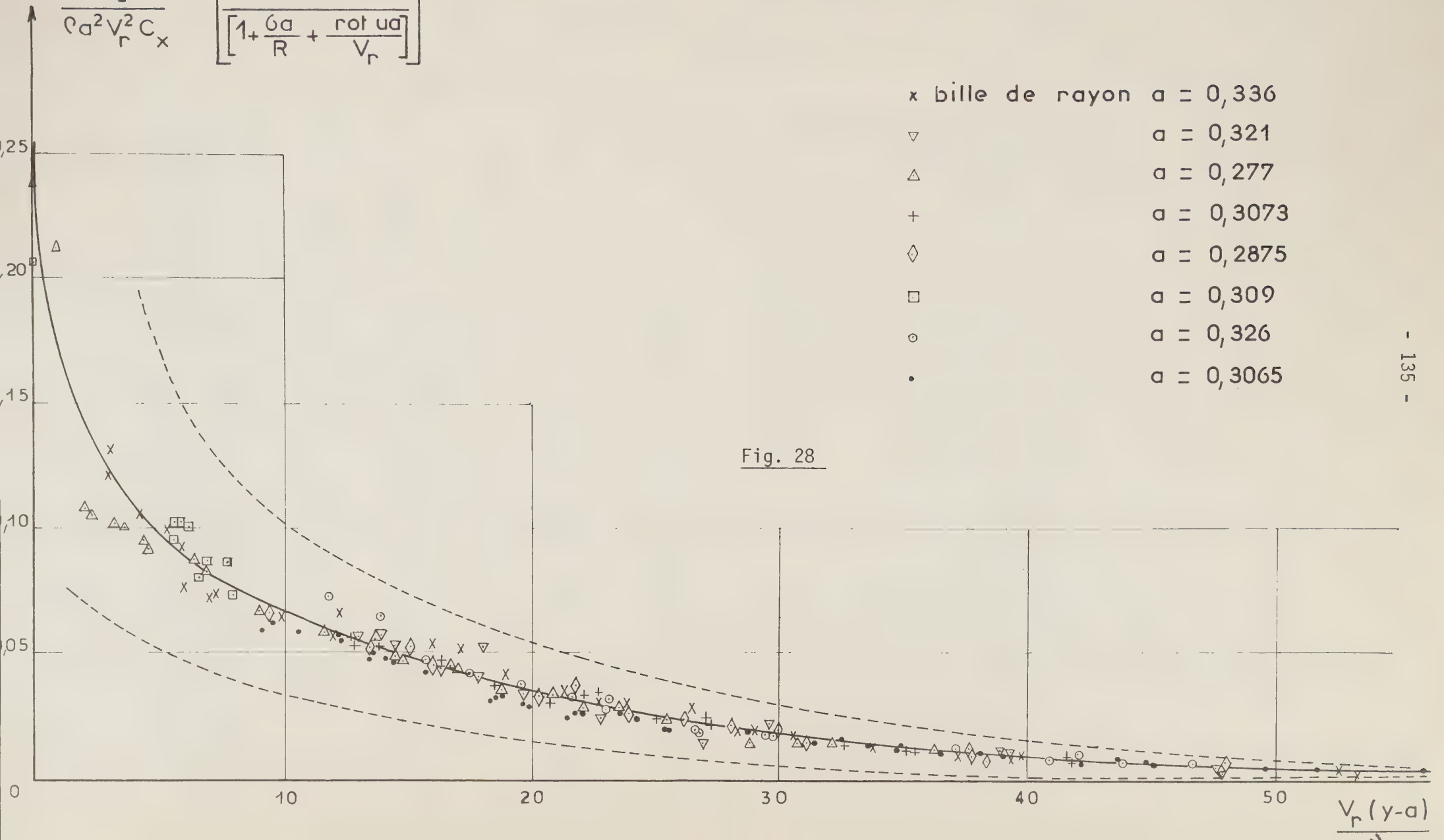


Fig. 28

Remarque

La valeur numérique des coefficients k_1 k_3 et k_4 peut être discutée et il serait sans doute possible d'obtenir un meilleur alignement des points en ajustant la valeur des coefficients. Compte tenu de la précision de nos expériences, et du domaine limité que nous avons exploré, nous n'avons pas jugé utile de rechercher une plus grande précision. On peut même supposer que les corrections introduites et notamment celles en $\frac{a}{R}$ et en $\frac{\text{rot u a}}{V_r}$ ne constituent qu'une première approximation et que dans un domaine d'expérience plus vaste, il conviendrait de rechercher les corrections plus élaborées.

III.2.3. ETUDE DE LA VITESSE DE ROTATION

L'étude théorique du chapitre I conduit à poser:

$$\frac{\Omega}{\text{rot u}} = K \text{ de l'ordre de } 0,5$$

L'analyse dimensionnelle montre que dans le cas de nos expériences le coefficient K peut être une fonction de :

$$\frac{y}{a} \qquad \frac{a}{R} \qquad \frac{V_r\ a}{\nu} \qquad \frac{\text{rot u a}}{V_r}$$

Il est assez difficile d'étudier l'influence de chacun de ces termes sur la vitesse de rotation étant donnée l'imprécision de la mesure de ces vitesses. Il convient en effet de

signaler que le système optique utilisé ne permettait pas de mesurer la vitesse de rotation de la bille à partir des clichés photographiques.(Le repère marqué sur la sphère se trouvant à certains moments dans des zones d'ombre). La vitesse de rotation de la bille a donc été mesurée en chronométrant le temps que la bille met pour effectuer un ou plusieurs tours sur elle-même. Cette mesure, ayant été effectuée par observation directe, il en résulte une imprécision relativement importante.

Quelle que soit la représentation choisie, il ne nous a pas été possible de mettre en évidence l'influence des termes $\frac{a}{R}$ et $\frac{\text{rot } u\ a}{V_r}$. Par contre, nous avons pu constater que le nombre de Reynolds de l'écoulement autour de la bille avait une influence non négligeable et que la vitesse de rotation de cette dernière était d'autant plus grande que le terme $V_r a / \nu$ était lui-même plus grand. Ce résultat est tout à fait logique car il revient à dire que la vitesse de rotation de la bille dépend de la nature de l'écoulement autour de celle-ci. Nous avons donc introduit le terme $V_r a / \nu$ sous forme de terme correctif en construisant la courbe représentative de :

$$\frac{\Omega}{\text{rot } u} \left(1 + K \frac{V_r\ a}{\nu} \right) \text{ en fonction de } \frac{y}{a} \qquad (117)$$

Le meilleur alignement des points expérimentaux a été obtenu en prenant pour K la valeur $\frac{1}{50}$ (figure 29). Etant donnée l'imprécision sur la mesure de Ω, nous pensons que la représentation proposée ne constitue qu'une représentation relativement grossière du phénomène et il nous semble que, s'il avait été possible de disposer de mesures suffisamment précises, nous aurions été amenés à inclure dans la représentation de Ω d'autres termes correctifs.

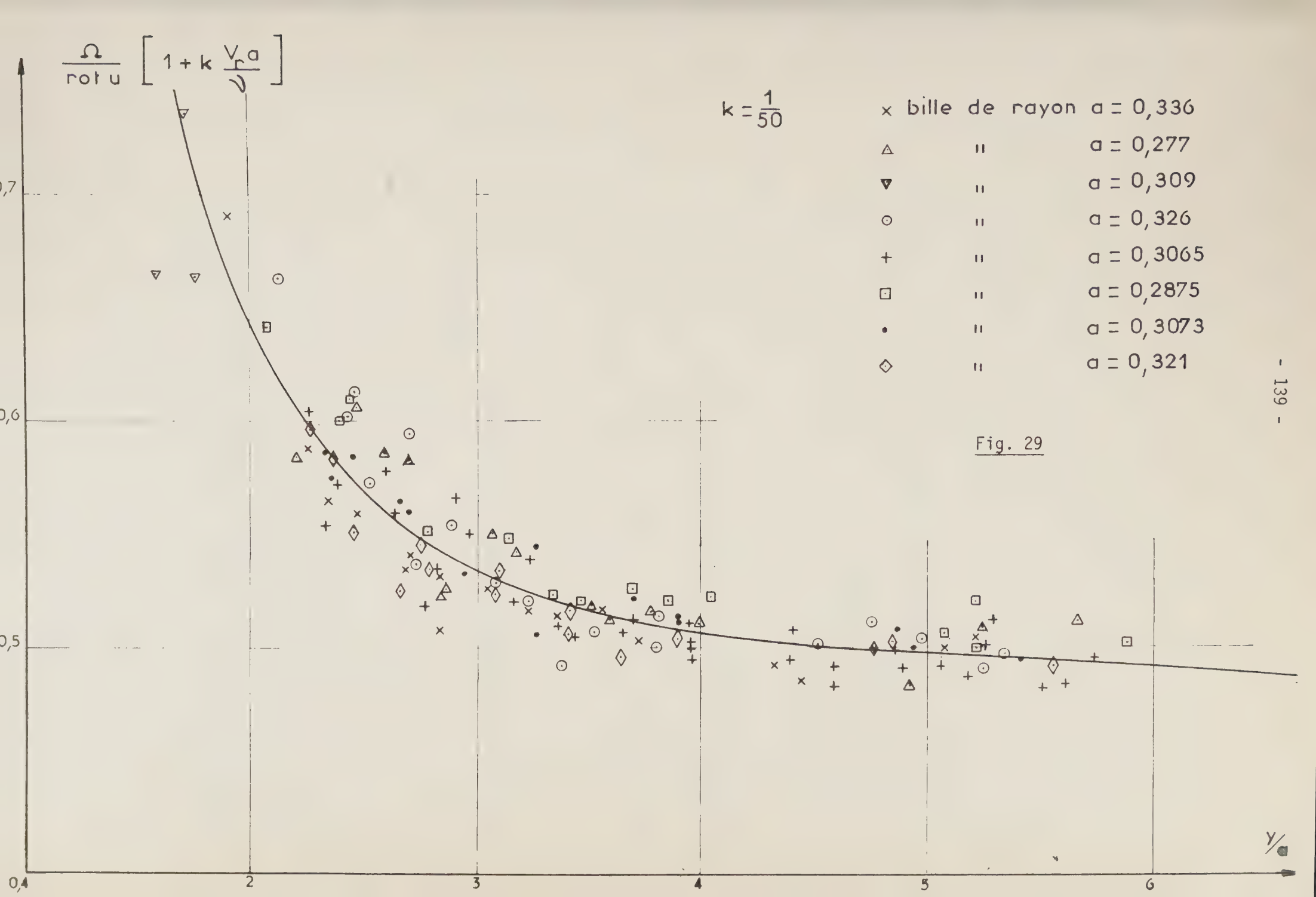

$\frac{\Omega}{\text{rot } u}\left[1 + k\,\frac{V_r a}{\nu}\right]$
$k = \frac{1}{50}$
× bille de rayon a = 0,336
△ " a = 0,277
▽ " a = 0,309
⊙ " a = 0,326
+ " a = 0,3065
□ " a = 0,2875
• " a = 0,3073
◇ " a = 0,321
0,7
0,6
0,5
0,4
2
3
4
5
6
y/a

Fig. 29

III. 3. PRECISION DES MESURES

L'inteprétation des résultats est basée sur l'introduction de termes correctifs dans les produits sans dimension permettant d'aligner les points expérimentaux autour d'une courbe unique . Il est donc essentiel d'avoir une idée aussi nette que possible de la précision avec laquelle sont connus chacun de ces produits.

Nous nous proposons dans le présent paragraphe de déterminer l'ordrede grandeur de laprécision de chaque mesure effectuée et d'en déduire la précision avec laquelle sont connus les produits sans dimension afin de vérifier que la dispersion des points résulte bien d'erreurs expérimentales aléatoires et non de l'influence systématique d'un paramètre .

Force de trainée

La force de trainée est déterminée à partir de la relation (92) :

$$F_T = \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho_s - \rho) g \cos \alpha$$

Le poids de la sphère $\frac{4}{3} \pi a^3 \rho_s g$ de l'ordre de 100 mg est connu à 1/10 de mg près.

La masse spécifique de l'huile étant une constante la précision sur la poussée d'Archimède $\frac{4}{3} \pi a^3 \rho g$, est fonction de la précision avec laquelle est déterminé le rayon de la sphère. Ce rayon de l'ordre de 3 mm étant connu à un centième de millimètre près,

la précision sur la poussée d'Archimède est de l'ordre de 1/100.

Devant l'importance de ce terme, nous négligerons l'erreur sur la mesure de cos α .

La force de trainée est donc connue à $\pm$ 1,1% près.

Force de portance

La force de portance est déterminée par la relation (93) :

$$F_p = \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho_s - \rho) g \sin \alpha$$

Nous avons déjà déterminé l'ordre de grandeur de précision sur le poids et la poussée d'Archimède. Mais il convient de tenir compte de l'erreur qu'on peut commettre sur sin α . L'erreur relative varie évidemment avec l'angle α . Afin de permettre la poursuite du calcul, nous avons admis une précision meilleure que 3,5 % sur sin α , ce qui sauf dans le cas des mesures effectuées à 1,5° correspond à une précision sur l'angle α du dixième de degré.

La force de portance F_p est donc connue à $\pm$ 4,6% près.

Distance à la paroi

La distance à la paroi est mesurée directement sur les agrandissements photographiques avec une précision de l'ordre du dixième de millimètre. La précision relative sur y varie donc avec y.

Elle est définie par le tableau ci-dessous :

y =	3m	10	20	30	40
$\frac{\Delta y}{y}$ =	3%	1%	0,5%	0,3%	0,25%

Vitesse relative

La vitesse relative est la différence entre la vitesse absolue de la bille et la vitesse locale de l'écoulement.

La vitesse absolue V_A de la bille est mesurée sur les agrandissement photographiques:

$$V_A = \frac{L}{T}$$

L : distance parcourue

T : intervalle de temps séparant deux éclairs.

$$\frac{\Delta V_A}{V_A} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta T}{T}$$

Nous admettrons que $\frac{\Delta L}{L}$ est égal à 1%.

Le système stroboscopique étant entraîné par un moteur synchrone, l'intervalle de temps qui sépare deux éclairs consécutifs est pratiquement constant et l'on peut négliger l'erreur commise sur ΔT.

Donc, la vitesse absolue V_A est connue à $\pm$ 1 %.

Vitesse locale

La vitesse locale $u = \frac{2Q}{S}\left(1 - \frac{(R - y)^2}{R^2}\right)$ peut s'écrire :

$$u = Q\ Y$$

L'erreur relative sur u est donc la somme des erreurs relatives sur U et sur Y .

Le débit est mesuré par jaugeage avec une précision de l'ordrede 0,5 %. L'erreur relative sur Y varie avec y . Compte tenu de la précision sur y le tableau ci-dessous donne l'erreur relative sur Y et par suite sur u et V_r.

y_{mm}	5	10	20	30	40
$\frac{\Delta Y}{Y}$ %	1,85	0,90	0,33	0,15	0
$\frac{\Delta u}{u}$ %	2,35	1,4	0,83	0,65	0,5
$\frac{\Delta V_r}{V_r}$ %	3,35	2,4	1,83	1,65	1,5

Viscosité

La viscosité de l'huile varie avec la température. En admettant destempératures mesurées au 1/2° près , on peut admettre sur ν une précision de l'ordre de 1%.

Coefficient de trainée

Le coefficient de trainée est lu sur une courbe en fonetion du nombre de Reynolds. On peut considérer que dans le domaine de nos expériences, la précision sur le coefficient de trainée est de l'ordre de grandeur de la précision sur le nombre de Reynolds, $\frac{V_r\, a}{\nu}$ qui varie en fonction de y .

$$\frac{\Delta C_X}{C_X} \simeq \frac{\Delta Re}{Re} = \frac{\Delta V_r}{V_r} + \frac{\Delta \nu}{\nu} + \frac{\Delta a}{a} \qquad (118)$$

Cette erreur est donnée par le tableau ci-dessous:

y_{mm}	5	10	20	30	40
$\frac{\Delta C_X}{C_X}$ %	4,65	3,7	3,1	3	2,8

Rotationnel de u

$$\text{rot } u = - \frac{4\,Q}{S} \frac{(R - y)}{R^2} \qquad (119)$$

qui peut s'écrire :

$$\text{rot } u = - Q \cdot X$$

L'erreur relative sur rot u est la somme des erreurs relatives sur Q et X qui varie avec y .

y_{mm}	5	10	20	30	40
$\frac{\Delta X}{X}$ %	0,30	0,33	0,5	1	-
$\frac{\Delta \text{ rot } u}{\text{rot } u}$ %	0,80	0,83	1	1,5	-

Vitesse de rotation Ω

Nous avons déjà eu l'occasion de signaler que la vitesse de rotation Ω était connue de façon assez peu précise étant donné le mode d'observation utilisé. Nous ne pensons pas pouvoir donner un ordre de grandeur raisonnable de la précision avec laquelle a été mesuré Ω . Aussi, n'avons-nous pas effectué le calcul d'erreur.correspondant. Seule, la dispersion des points expérimentaux sur la figure 29 donne une idée de l'erreur commise.

Nous disposons de tous les éléments pour calculer la précision avec laquelle est donnue la valeur de chaque produit sans dimension pour chaque valeur de y/a. En négligeant les erreurs

sur les termes correctifs les tableaux suivants définissent la précision sur chacun de ces termes ;

$$\underline{\text{Etude du nombre}}\ N_1 = \frac{F_T}{\rho\ a^2\ V_r^2\ C_X}$$

On a :

$$\frac{\Delta N_1}{N_1} = \frac{\Delta F_T}{F_T} + \frac{2\ \Delta A}{a} + \frac{2\,\Delta V_r}{V_r} + \frac{\Delta\ C_X}{C_X} \qquad (120)$$

En fonction de y, il vient :

y_{mm}	5	10	20	30
$\frac{y}{a}$ (+)	1,66	3,3	6,6	10
$\frac{2\ \Delta a}{a}$	0,6	0,6	0,6	0,6
$\frac{2\Delta V_r}{V_r}$	6,70	4,8	3,66	3,3
$\frac{\Delta\ C_X}{C_X}$	4,65	3,7	3,1	3
$\frac{\Delta\ F_T}{F_T}$	1,1	1,1	1,1	1,1
$\frac{\Delta\ N}{N}$	13	10,2	8,5	8

(+) Ordre de grandeur

Sur la figure n° 25, nous avons représenté en pointillé les limites définissant la marge d'erreurs et nous pouvons constaté que les points expérimentaux se situent très largement à l'intérieur de ces limites.

Etude du nombre $N_2 = \dfrac{F_{P2}}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \quad C_X}$

L'étude des erreurs commises sur ce paramètre est plus délicate car la force F_{P2} est calculée à partir de la différence entre la force F_p mesurée et la force F_{P1} calculée à partir de la relation :

$$F_{P1} = k_1 \; \rho \; a^3 \; \text{rot u} \; V_r$$

Etudions tout d'abord l'erreur commise sur F_{P1}. On a, en admettant le coefficient k_1 rigoureusement constant :

$$\frac{\Delta F_{P1}}{F_{P1}} = 3 \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta \text{ rot u}}{\text{rot u}} + \frac{\Delta V_r}{V_r} \qquad (121)$$

En fonction de y on obtient les résultats suivants :

y_{mm}	5	10	20	30
$3\frac{\Delta a}{a}$ %	0,9	0,9	0,9	0,9
$\frac{\Delta \text{ rot } u}{\text{rot } u}$ %	0,8	0,83	1	1,5
$\frac{\Delta V_r}{V_r}$ %	3,35	2,4	1,8	1,65
$\frac{\Delta F_{P1}}{F_{P1}}$ %	5,05	4,13	3,7	4,05

Nous admettrons donc que la précision relative sur F_{P1} est en moyenne de 4 %, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que F_P.

$$N_2 = \frac{F_P - F_1}{\rho \; a^2 \; V_r^2 \; C_X} \qquad (122)$$

et

$$\frac{\Delta N_2}{N_2} = \frac{\Delta (F_P - F_{P1})}{F_P - F_{P1}} + \frac{2\,\Delta a}{a} + \frac{2\,\Delta V_r}{V_r} + \frac{\Delta C_X}{C_X} \qquad (123)$$

c'est-à-dire :

$$\Delta N_2 = \pm \{ \left(\frac{2\,\Delta a}{a} + \frac{2\,\Delta V_r}{V_r} + \frac{\Delta C_X}{C_X} \right) N_2 + \frac{\Delta F_{P1} + \Delta F_P}{F_P - F_1} . N_2 \}$$

ou encore

$$\Delta N_2 = \pm \left\{ \left(\frac{2\,\Delta a}{a} + \frac{2\,\Delta V_r}{V_r} + \frac{\Delta C_X}{C_X} \right) N_2 + 0{,}04 \frac{F_P + F_{P1}}{\rho\, a^2\, V_r^2\, C_X} \right\} \qquad (124)$$

Il n'est pas possible d'étudier théoriquement la variation de ΔN_2. Aussi, nous nous sommes contentés de calculer cet écart pour un certain nombre de points caractéristiques.

Ces résultats sont consignés dans le tableau ci-après , et sur la figure 28 nous avons représenté les limites approximatives de l'erreur commise.

Remarques. Aussi bien sur la figure 25 que sur la figure 28, on peut constater que les courbes définissant la limite d'erreurs encadrent très largement l'ensemble des points expérimentaux. Il convient de souligner que ce calcul d'erreurs effectué définit une erreur maximum maximorum et correspond au cas fort improbable où toutes les erreurs aléatoires s'ajouteraient.

Ces résultats montrent que la dispersion des points expérimentaux peut bien être imputée aux erreurs de mesure. Néanmoins pour $y = a$ c'est-à-dire quand la particule touche la paroi, on note une grande dispersion des points que les seules erreurs de mesure ne peuvent expliquer. Nous avons donc étudié plus spécialement ce phénomène.

y_{mm}	5	7	10	12	20
$\frac{V_r(y - a)}{\nu}$	4,25	10	23	34	50
$\frac{2 \Delta a}{a}$	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007
$\frac{2 \Delta V_r}{V_r}$	0,067	0,06	0,048	0,040	0,036
$\frac{\Delta C_X}{C_X}$	0,0465	0,042	0,037	0,035	0,031
N_2	0,230	0,192	0,10	0,0383	0,0079
$F_P + F_{P1}$	5,026	11,14	13,621	7,15	1,926
$\rho a^2 V_r^2 C_X$	15,72	31,79	35,68	36,32	28,84
$\pm \Delta N_2$	0,04	0,035	0,0174	0,0107	0,0031

CHAPITRE IV

ETUDE DU COMPORTEMENT D'UNE PARTICULE SPHERIQUE AU CONTACT AVEC LA PAROI

Les expériences ont été menées de la façon suivante : l'inclinaison du tube expérimental α et le débit Q sont réglés à une valeur constante.

On fait alors deux expériences ; l'une en introduisant la sphère au milieu de l'écoulement, l'autre en l'introduisant en contact avec la paroi.

Les phénomènes observés sont les suivants :

I. Pour des valeurs de α inférieures ou égales à 6°, les phénomènes observés sont les mêmes quel que soit le point d'introduction de la particule. Pratiquement, quand le débit est nul, la bille vient ou reste en contact avec la paroi et descend en roulant le long de la génératrice inférieure. Dès que le débit prend une certaine valeur, la sphère décolle de la paroi et se stabilise à une distance y de cette dernière quelle que soit la façon dont elle a été introduite.

II. Pour des inclinaisons de l'ordre de 9 à 12°, on observe trois comportements différents :

a . Pour les débits relativements grands, la position d'équilibre prise par la bille est indépendante du mode d'introduction de la bille et celle-ci se stabilise à une distance y de la paroi parfaitement bien définie.

b . Pour de faibles débits, la bille vient au contact de la paroi et descend en roulant le long de la génératrice inférieure du tube. Sa vitesse de rotation est alors de sens contraire à la valeur du rotationnel.

c . Pour des débits intermédiaires, la bille introduite au milieu de l'écoulement se stabilise à une distance y de la paroi et la bille introduite à la paroi reste en contact avec cette dernière. Il existe donc dans un tel cas deux positions stables possibles.

Cette indétermination de la position de la bille peut expliquer les écarts observés pour les très faibles valeurs de y . Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'étude de ce phénomène.

Pour différentes particules et pour différentes valeurs de l'angle α , nous avons :

1°. Introduit la particule au centre de l'écoulement et fait décroître progressivement le débit. Nous avons noté la position d'équilibre, y, prise par la particule en fonction du débit. Les résultats obtenus sont représentés sur les courbes de la figure 30 par l'arc ABC.

t° constante = 18°5

a 0 309

x debits decroissants

⊙ debits croissants

Fig. 30

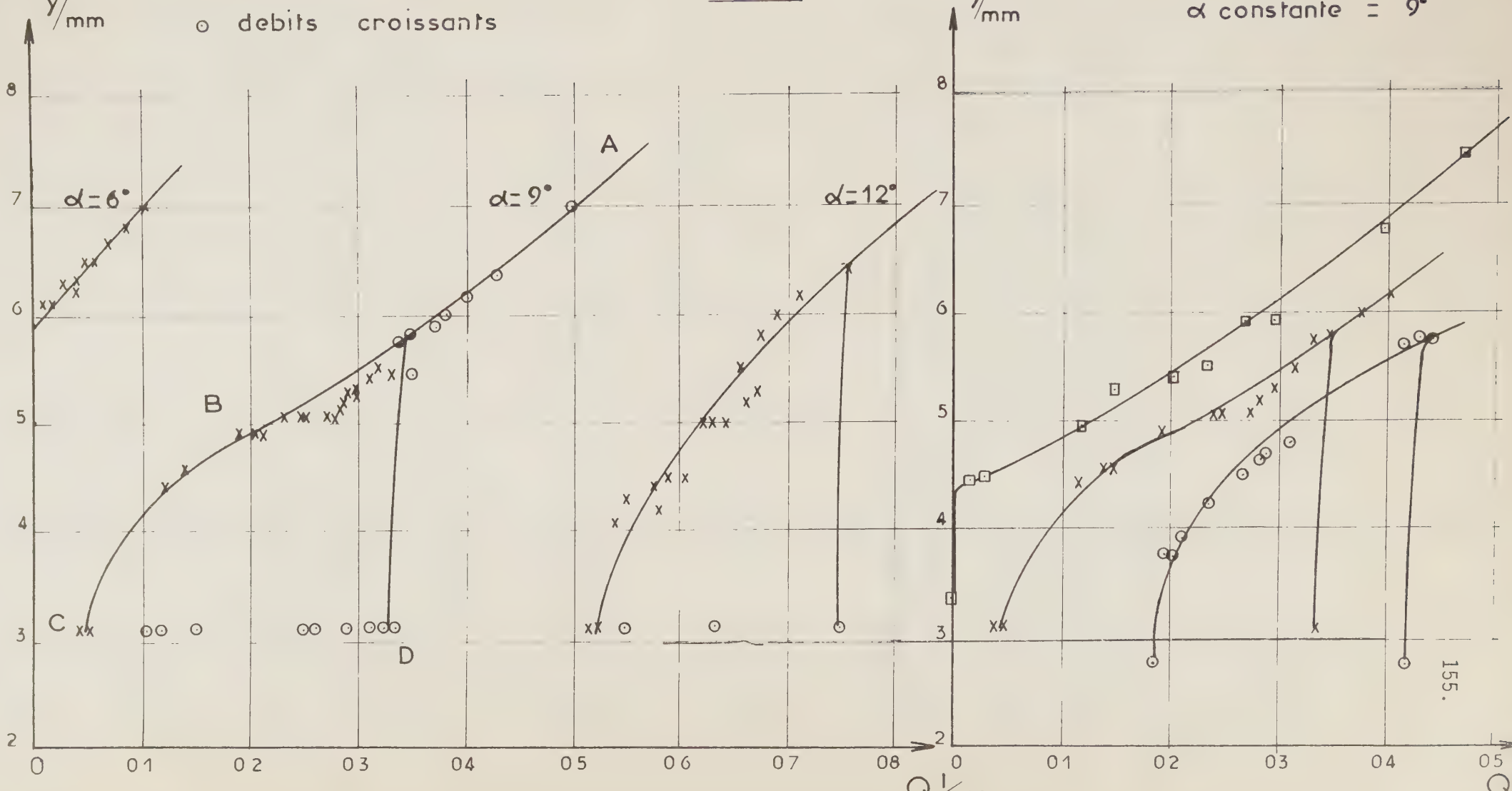
⊡ bille de rayon a = 0,336

⊙ a = 0,277

x a = 0,309

t° comstante = 18°5

α constante = 9°



2°. La particule étant introduite à la paroi, nous avons fait croître progressivement le débit et nous avons noté encore la position d'équilibre prise par la particule. Les résultats correspondants sont représentés sur les courbes de la figure 30 par les portions de courbes C D A. Ces courbes présentent une forme rappelant un cycle d'hystérésis qui met en évidence le phénomène d'indétermination évoqué plus haut. Ces courbes permettent par ailleurs de constater que ce phénomène ne se produit que pour des valeurs de α de l'ordre de 9 à 12° et pour les sphères d'un rayon supérieur à 3,36 mm.

Tout se passe comme si, dans ces conditions, la bille "collait" à la paroi et que pour la mettre en mouvement il fallait dépasser un certain seuil.

Nous avons recherché l'explication de ce phénomène afin de vérifier qu'il ne s'agissait pas d'un phénomène parasite susceptible de remettre en question l'ensemble des résultats obtenus.

Nous avons tout d'abord pensé qu'il pouvait s'agir de charges électro-statiques développées sur les parois du tube et sur la sphère par l'écoulement, encore que cette explication paraisse peu vraisemblable puisque le phénomène n'apparaît pas dans certaines conditions. Néanmoins, nous avons procédé à une expérience afin de mettre en évidence l'absence de charges électrostatiques.

Le tube étant maintenu vertical , nous avons immobilisé une sphère au moyen d'un fil vertical au voisinage immédiat de la paroi. Après avoir fait couler pendant plusieurs heures, nous avons vérifié, en déplaçant le point d'attache du fil, qu'aucune force d'origine électro-statique ne maintenait la sphère au contact de la paroi. Il semble donc que le phénomène observé soit un phénomène purement hydrodynamique qui peut s'expliquer de la façon suivante:

quand la sphère entre en contact avec la paroi, il apparaît une force de frottement qui s'oppose à la mise en rotation de la bille sous l'effet du gradient de vitesse. Cette hypothèse est confirmée d'une part par l'ordre de grandeur extrêmement faible du couple de rotation dû à la force de viscosité (au Chapitre II, nous avons montré que l'ordre de grandeur de ce couple était de 1 dyne x cm), d'autre part par le fait qu'une bille en contact avec la paroi roule pratiquement sans glisser sur cette dernière en tournant sur elle-même dans le sens contraire de celui que tendrait à lui imposer le gradient de vitesse. Dans ces conditions, quand la billeest en contact avec la paroi, les conditions aux limites de l'écoulement sur la sphère sont modifiées et il est normal que la résultante des forces soit elle-même modifiée.

Si l'on remarque que les formules théoriques conduisent à admettre que les forces de portance sont proportionnelles à la vitesse de rotation de la bille, il est logique d'observer une diminution de ces forces de portance c'est-à-dire un retard à la mise en mouvement de la bille quand celle-ci est en contact avec la paroi.

Cette explication rend compte des phénomènes observés et n'est pas incompatible avec le fait que ce phénomène d'hystérésis n'existe ni pour les faibles angles, ni pour les particules de diamètre relativement élevé. En effet, dans un tel cas, même pour les très faibles débits, la force de portance est dans tous les cas suffisante pour provoquer la mise en mouvement de la bille.

C O N C L U S I O N

La détermination théorique des forces hydrodynamiques qui s'exercent sur une particule placée dans un écoulement laminaire s'étant révélée impossible par suite de la complexité des conditions aux limites, nous avons mis au point une méthode expérimentale qui respecte tous les degrés de liberté de la particule.

Les résultats obtenus se présentent sous la forme d'une fonction de huit variables dont la plupart varient d'une expérience à une autre.

L'interprétation de ces résultats n'a été possible que grâce à une analyse dimensionnelle très détaillée des phénomènes observés. En utilisant :

- les résultats d'expériences antérieures
- une étude théorique approchée
- une interprétation de la signification physique de certains produits tels que le nombre de Reynolds ou la dimension relative de la particule,

nous avons pu proposer une formulation générale du phénomène à partir de produits sans dimensions.

La représentation graphique des résultats obtenus suivant la formulation proposée confirme la validité des hypothèses émises. Ces résultats montrent que :

- la force de trainée est pratiquement indépendante du gradient de vitesse et peut dans tous les cas être calculée avec un bon degré d'approximation par les méthodes classiques correspondant à un régime uniforme.

- la force de portance peut être considérée comme la somme de deux termes , l'un directement fonction du gradient de vitesse, l'autre caractéristique de l'inter-réaction de paroi.

Cette notion rend, à notre avis, compte de la divergence des résultats proposés par différents auteurs qui ne prennent en compte que l'un ou l'autre des phénomènes. La formulation proposée à partir de produits sans dimension est très générale et le domaine d'application peut être étendu à un domaine plus vaste que celui de nos expériences dans la mesure où l'on peut prévoir l'influence des termes correctifs introduits. C'est notamment le cas de particules de petit diamètre pour lesquelles l'influence de ces termes devient faible.

Dans le cas d'un écoulement turbulent, l'ordre de grandeur des termes correctifs doit changer et les formules proposées ne sont pas applicables. Il conviendrait de mener, dans ce cas, une étude basée sur les mêmes principes.

La connaissance des forces hydrodynamiques et notamment des forces de portance peut permettre de rendre compte de certains phénomènes mal définis tels que la saltation des grains de sable ou le comportement de particules en suspension.

Nous pensons que notre travail contribuera à une meilleure compréhension de l'aspect fondamental de la mise en mouvement de matériaux.

B I B L I O G R A P H I E

1. H. LAMB

   Hydrodynamics
   6ème Edition 1945 Cambridge University Press

2. J. GRUAT

   Cours de Mécanique des Suspensions

3. W.E. LANGLOIS

   Slow viscous flow
   MacMillan Company New York

4. L. PRANDTL

   Guide à travers la Mécanique des Fluides
   Dunod Ed.

5. A. FORTIER

   Mécanique des Suspensions
   Masson Ed.

6. C. JACOB

   Introduction Mathématique à la Mécanique des Fluides

7. P. GERMAIN

   Mécanique des Milieux Oontinus
   Masson Ed.

8. S.I. RUBINOW et J.B. KELLER

The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid.

9. LAGERSTROM et COLE

1955 - J. Rat. Mech. Anal 4-817

10. PROUDMAN et PEARSON

Expansion at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder.
J. of Fluid Mech. 1957 - 2-237

11. SAFFMAN

The ŧift on a small sphere in a slow shear flow.
J. Fluid Mech. 1965 vol 22 pp 385

12. EICHORN et SHALL

Experiment on the lift and drag of spheres suspended in a Poiseuille flow.
J. Fluid. Mech. 1964 vol 20 p 513

13. CHILDRESS

The slow motion of a sphere in a rotating viscous fluid.
J. Fluid Mech. 1964 vol 20 p 305

14. JAYAWEERA et MASON

The behaviour of clusters of spheres falling in a viscous fluid.
Part 1 Experiment J. Fluid Mech. 1964 vol 20 pp 121

15. HOCKING

The behaviour of clusters of spheres falling in a viscous fluid.
Part 2 Slow motion theory J. Fluid Mech. 1964 vol 20 p 129

16. BRETHERTON

Inertial effects on clusters of spheres falling in a viscous fluid.
J. Fluid Mech. 1964 vol 20 p 401

17. I. DEE-CHANG

Navier-Stokes solutions at large distances from a finite body.
J. of Math. and Mech. vol 10 n° 16 1961

18. LANKSHAMA RAO

Some special solutions in viscous fluid motion.
Proc. R.I.A. vol 62 sect A

19. H. GIESEKUS

Strömungen mit konstanten Geschwindig Keits gradienten und die Bewegung von darin suspendierten Teilchen.
Teil I Raümliche Strömungen Rheologica Acta, Band 2, Heft 2 - 1962

20. T. KARMANN et LIN

On the existence of an exact solution of the equation of Navier-Stokes.
Pure and Applied Math. vol XIV p 645 - 1961

21. DEMENTIEV

Le transport d'un corps solide unique par un courant non homogène de liquide.
Izv. Inst. Guidrotekh. URSS Tome 54 p 3 - 1955

22. ALLEN

The motion of a sphere in a viscous fluid.
Ph. Mag and J. of Sciences 1900

23. A NANIAN et GERBASHIAN

Sur le système d'équations définissant le mouvement des écoulements transportant des matériaux en suspension.
AIRH vol 3 n° 1 p 20 - 1965

24. APELT

The steady flow of a viscous fluid past a circular cylinder at Reynolds numbers 40 et 44.

25. CHESTER - BREACH

On the flow past a sphere at low Reynolds number.
J. Fluid Mech. 1969 vol 37 p 751

26. CHRISTOPHER-TAM

The drag on a cloud of spherical particles in a low Reynolds number flow.
J. Fluid Mech. 1962 vol 38 p 537

27. COX et BRENNER

Effect of finite boundaries on the Stokes resistance of an cubitraly particle.
J. Fluid Mech. 1967 vol 28 p 391

28. FAYON et HAPPEL

Effect of a cylindrical boundary on a fixed rigid sphere in a moving viscous fluid.
A.I.Ch.E. Journal Mars 1960 vol 6 p 55

29. FIDLERIS

Experimental determination of the wall effect for spheres falling axially in cylindrical.
B. J. of App. Phys. vol 12 - 1961

30. GREENSTEIN - HAPPEL

Theoretical study of the slow motion of a sphere and a fluid in a cylindrical tube.
J. of Fluid Mech. 1968 vol 34 p 705

31. LAMB

On the uniform motion of a sphere trough a viscous fluid.
Phil. Magz. vol 12 p 112 - 1911

32. MASHED et MOORE

Drag forces in velocity gradient flow.
Trans ASCE n° 128 p 48 - 1963

33. MAXWORTHY

An experimental determination of the slow motion of a sphere in a rotating viscous fluid.
J. Fluid Mech. 1965 - 23 - p 373

34. MOREAU

Les rotations d'une particule solide entraînée dans un écoulement.
Congrès National de l'Aviation Française. 1946

35. NIGAM - SUBBARAO

On slow motion of a sphere in a viscous fluid.
Proc. Indian Acad Sci. 1966 - 64 n° 4 p 249

36. O'NEILL - STEWARTSON

On the slow motion of a sphere parallel to a nearly plane wall.
J. Fluid Mech. 1967 vol 27 p 705

37. TORSTEN - BOHLIN

On the drag of a rigid sphere moving in a viscous liquid inside a cylindrical tube.
Trans. Rag. Inst. Tech. Stockolm n° 155 - 1960

38. WANG - SKALAK

Viscous flow in a cylindrical tube containing a line of spherical particles.
J. Fluid Mech. 1969 vol 38 p 75

39. MAXWORTHY

Accurate measurements of sphere drag at low Reynolds numbers.
J. Fluid Mech. 1965 vol 23 p 369

40. JEFFREY et PEARSON

Particle motion in laminar vertical tube flow.
J. Fluid Mech. 1965 vol 22 p 721

41. COUSINS

A note on shear flow past a sphere.
J. Fluid Mech. 1970 vol 40 p 543

42. MAUDE et YEARN

Particle migration in suspension flow.
J. Fluid Mech. 1967 vol 30 p 601